

ایند که بگویند که ما صاحب کرامت  
و سید عالم هستیم

الکافی



شیخ ابوشیخ ابی حمزه ادریسی  
کاتب

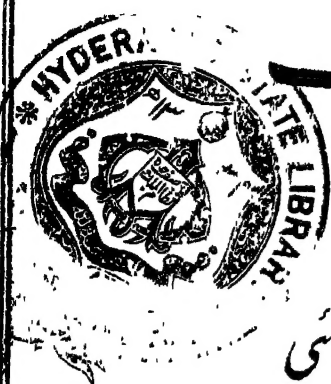
کتابخانه

# فہرست مضامین

نمبر صفحہ

ب

۱	اصول ابتدائی	
۲	سرعت کا بیان	باب اول
۱۱	اسراع کا بیان	باب دوم
۱۸	سرعت اور اسراع کے ساتھ ذرہ کی حرکت کا بیان	باب سوم
۳۴	حرکت مرکب اور انفعال حرکت کا بیان	باب چارم
۴۸	سرعت الزاویہ اور اسراع الزاویہ کا بیان	باب پنجم
۵۶	سرعت منتجب	باب ششم
۶۶	حرکت کا اول قانون	باب ہفتم
۷۷	دوسرا قانون	باب ہفتم
۸۱	تیسرا قانون	باب ہفتم
۸۵	اجسام کے مرکز ثقل کی حرکت کا بیان	باب دہم
۹۳	کشش ثقل کا بیان	باب یازدہم
۱۰۸	سطح بایں پر حرکت کا بیان	باب دوازدہم
۱۲۹	شاقل کا بیان	باب سترہم
۱۳۷	مقذوفات کی حرکت کا بیان	باب چھترہم
۱۵۳	اشاء کے مضاربہ کا بیان	باب پانزدہم



# علم حرکت

## اصول ابتدائی

- (۱) — علم حرکت میں ذرہ و جسم و خط وغیرہ کے حرکت کا بیان ہوتا ہے۔
- (۲) — علم حرکت کے دو حصہ ہیں۔ اول۔ وہ جسمین ذرہ یا خط وغیرہ کے حرکت کا بیان ہوتا ہے یعنی جسمین شئی متحرک کے جسم کا لحاظ نہیں کیا جاتا۔ دوم۔ وہ جسمین شئی متحرک کے جسم کا لحاظ کیا جاتا ہے۔
- یعنی جسمین اوس شئی کے حرکت اور اوس کے مقدار جسم کے تعلق کا ذکر ہوتا ہے۔
- (۳) — اس رسالہ کو صرف ذرہ کے حرکت کا بیان کر کے اور ایسی امور کا ذکر کر کے کہ کس قدر طاقت کس قدر جسم پر کس قدر حرکت پیدا کرتی ہے ختم کر دینا۔
- جسم کے ہر ایک طرح کی حرکت کا سمجھا مشعل ہے۔ اور فقط ریاضی کے اعلیٰ شاخون کے پریشانی پر منحصر ہے۔ یہ خیال کرنا چاہیے کہ ہمیں فقط جسموں پر کام پڑتا ہے۔ ذرون سے نہیں۔ اور اس لئے ذرہ کے حرکت کا بیان کرنا بیفائدہ ہے۔ بلکہ جسم ذرون کا مجموعہ ہے۔ اور اکثر جسم کا ہر ایک ذرہ

ایک ہی قسم کے حرکت کرتا ہے۔ پس ایک ذرہ کے حرکت کیسے ہے  
کل جسم کے حرکت معلوم ہو سکتی ہے۔

(۴) ذرہ کی حرکت کے بیان میں مندرجہ ذیل کا ذکر ہوگا۔ ۱۔ کسی  
خاص مقام اور وقت پر اس کی حرکت کس قدر ہے۔ ۲۔ وہ کس طریق میں  
حرکت کرتا ہے۔ ۳۔ کسی خاص لمحہ میں حرکت کی سمت کیا ہے۔ اور ذرہ  
اور وقت کس خاص مقام پر تقسیم ہے۔ ۴۔ کسی مقام سے دوسرے مقام پر پہنچنے  
میں کتنا وقت درکار ہے

### باب اول سرعت کا بیان

(۵)۔ کسی شے یا ذرہ کے تبدیلی مقام کو حرکت کہتی ہیں۔ کسی وقت معین پر  
کسی ذرہ یا شے کے تبدیلی مقام کے مقدار کو اس معین وقت کے سرعت کہتے ہیں۔  
سرعت دو قسم کے ہوتی ہے۔ اول۔ یکساں۔ دوم۔ غیر یکساں یا متغیر

(۶) سرعت یکساں کا بیان۔ جب کوئی ذرہ برابر وقتوں میں برابر فاصلہ

طی کرے خواہ وہ وقت کتنا قلیل یا کتنی ہی دراز فرض کیا جائے تو اس کی  
سرعت کو سرعت یکساں یا ستوی کہتی ہیں۔ اس حالت میں ذرہ کی حرکت  
ہر ایک لمحہ میں ایک مقدار مستقیم ہوتی ہے جب حرکت اس قسم کے نہ تو  
اس کو سرعت غیر یکساں کہتی ہیں۔ مثلاً اگر کھاجا دے کہ ذرہ کے سرعت

۲۰ فٹ فی منٹ ہے تو اس سے یہ مراد ہوتی ہے کہ ذرہ ہر ایک منٹ میں

۲۰ فٹ فاصلہ طے کرتا ہے۔ اور ایک منٹ کے کسی جزو یا نصف میں بھی



۲۔ فٹ کے اوتنی جبرو یا ضعف ملی کرتا ہے۔ سرعت یکسان کو ہم اکثر مختصر  
سرعت کہتے ہیں۔

(۷)۔ واضح ہو کہ حرکت کے معنی میں وقت اور فاصلہ دو نو کا خیال آجاتا ہے۔  
ہر ایک شخص فاصلہ اور وقت کے معنی جانتا ہو۔ فاصلہ کا اپنی فاصلہ کو اکائی  
فرض کر کے ہوتا ہے۔ یعنی جب کہتی ہیں کہ فاصلہ ۵ میل ہے۔ تو یہ مراد  
ہوتی ہے۔ کہ فاصلہ ایک میل کا اکائی فاصلہ ہے اور فاصلہ مذکورہ اسکا  
پانچ گنا ہے۔ یعنی عدد پانچ اس فاصلہ کو تعبیر کرتا ہے۔ اگر ہم بجائی ایک میل  
کے ایک گز کو اکائی فرض کر کے اس فاصلہ کو پاپتے تو عدد ۸۸۰۰ اسی  
فاصلہ کو تعبیر کرتا۔ پس معلوم ہوا کہ جب اکائی مختلف فرض کیجائے۔ تو وہ  
عدد بھی جو کسی خاص فاصلہ کو تعبیر کرتا ہے مختلف ہوگا۔ وقت کے ناپ کے  
وسطی ہی اکائی کا اختلاف اسطرح سمجھنا چاہئے۔

(۸)۔ اگرچہ اکائی فرض کرنا پامائش کنندہ کا مرضی پر منحصر ہے مگر عموماً آسانی  
لئے ہر ایک چیز کے پامائش کے لئے خاص خاص اکائیں فرض کی جاتی ہیں مثلاً  
فاصلہ کے پامائش کے لئے فٹ اور بڑے فاصلہ کے لئے میل اکائی فرض  
کیا جاتا ہے۔ اسطرح تہوہے وقت کے لئے ایک سکنڈ۔ اور وقت در  
کے لئے ایک گنٹھ اکائی فرض کیا جاتا ہے۔

(۹)۔ سرعت کی پامائش۔ واضح ہو کہ سرعت سے مراد وقت یا فاصلہ  
نہیں ہے۔ بلکہ کسی متحرک شے کے ایک خاص حالت ہے جس سے  
اسکی تبدیلی مقام واقع ہوتی ہے۔ سرعت کے پامائش کسی خاص سرعت کو

اکائی کرنے سے ہوتی ہے۔ مثلاً اگر سرعت یکسان کو جس سے کوئی ذرہ ایک منٹ میں حرکت کر کے ایک میل فاصلہ طے کرتا ہے۔ اکائی فرض کجا جاوے۔  
 - تو جس سرعت سے وہ ذرہ ایک منٹ میں دو میل فاصلہ طے کرے۔ اسی عدد ۲- سے تعبیر کریں گے۔ اور علیہذا القیاس۔ سرعت کی اکائی کوئی فرض کجا سکتی ہے مگر حکم آسانی کے لئے ایک ایسی سرعت کو اکائی فرض کرتی ہیں کہ جس سے کوئی ذرہ اکائی وقت میں اکائی فاصلہ طے کرے۔ مثلاً جب ایک فٹ۔ اور ایک سیکنڈ۔ اکائی فرض کجا یوں۔ تو اس یکسان سرعت کو جس سے ذرہ ایک سیکنڈ میں ایک فٹ فاصلہ طے کرے اکائی کہیں گے۔ اور اس یکسان سرعت کو جس سے ذرہ ایک سیکنڈ میں دو فٹ فاصلہ طے کرے عدد ۲- سے تعبیر کریں گے اور طے ہذا القیاس۔ اس یکسان سرعت کو جس سے ذرہ م۔ فٹ ایک سیکنڈ میں طے کرے۔ عدد م۔ سے تعبیر کریں گے۔ گویا یہ معلوم ہوا کہ اکائی وقت میں ذرہ کے فاصلہ طے شدہ میں خستہ اکائیوں کے تعداد ہو وہی عدد اویس کے سرعت کو ہی تعبیر کرتا ہے۔ مثلاً جب کہا جاوے کہ ذرہ ایک کے سرعت - ۵- ہے۔ تو اس سے یہ مراد ہوتی ہے کہ وہ ذرہ ہر ایک اکائی وقت میں یکسان چکر اکائی فاصلہ کا پانچ گنا طے کرتا ہے۔  
 (۱۰)۔ علم حرکت میں سرعت یکسان خط مستقیم سے تعبیر کجا تھی ہے۔  
 مثلاً فرض کرو کہی نقطہ میں ذرہ نقطہ - ۱- پر ہے اور - ۱ ب۔ او کی خط تحریک ہے اور او کی سرنگ ہے ب۔ ————— ۱ ————— اگر م  
 خط تحریک میں نقطہ ب۔ ایالین کہ ۱ ب۔ کے طول گ سے متاثر ہے

تو اب سرعت گ کو تعبیر کریگا یعنی ذرہ سرعت گ کے ساتھ اکائی وقت  
میں یکساں حرکت سے اچل کر نقطہ ب تک پہنچ جائیگا۔ حرکت کی سمت  
کے تعبیر کریں گی لئے خط اب پر تیر کے پھل کا نشان استعمال کرتی ہیں۔

(۱۱)۔ اگر ایک ذرہ سرعت گ سے چل کر وقت س میں فاصلہ

طی کرے تو ف = گ × س ثبوت جب کہتی ہیں کہ ذرہ کی سرعت گ

تو اس سے یہ مراد ہوتی ہے کہ ذرہ اکائی وقت میں فاصلہ کی گ اکائی  
طی کرتا ہے۔ اس لئے س وقت میں گ × س اکائی فاصلہ طے کریگا مگر

یہی اسی فاصلہ فرض کیا تھا اس واسطے ف = گ × س۔

سیدنیہ حد مذکورہ بالا میں اکائی سرعت وہ حرکت ہے جسے کہ ذرہ اکائی  
میں یکساں چل کر اکائی فاصلہ کی طے کرتا ہے۔ اسی حد سے یہ بھی ظاہر  
ہے کہ فاصلہ میں کیونکہ گ غیر تبدیل مانا گیا ہے۔ اور اس طرح سے جب فاصلہ

طی شدہ وقت حرکت سے تناسب ہو تو ہم جائیگی کہ ذرہ کی سرعت یکساں ہے

(۱۲) ایک ہی سرعت مختلف اکائی فاصلہ اور وقت کے ساتھ باہمی سے

مختلف عددوں سے تعبیر ہوتی ہے۔ مثلاً گوی سرعت فی سیکنڈ ۴ گز ہے

یہاں ایک سیکنڈ اور ایک گز کو جدا گانہ اکائی وقت اور اکائی فاصلہ فرض

کرنی سے وہ سرعت عدد ۴ تعبیر ہوگی۔ اسی حرکت کو فی سیکنڈ ۶ فٹ بھی

کہہ سکتی ہیں اس لئے ایک سیکنڈ اور ایک فٹ کو جدا گانہ اکائی وقت اور اکائی

فاصلہ فرض کرنی سے وہی سرعت عدد ۶ سے تعبیر ہوگی۔ اسی طرح سے اگر

سرعت کو فی منٹ ۲۰ اگر کہہ سکتی ہیں پس ایک منٹ اور ایک گز کو جدا گانہ

اکائی وقت اور اکائی فاصلہ فرض کرنی سے وہی سرعت عدد ۱۲۰ سے تعبیر ہوگی  
اور علیٰ ہذا القیاس۔ فرض کرو کہ جب گ سیکڑ اکائی وقت اور ن فٹ اکائی  
فاصلہ ہے کوی مفروضہ یکسان سرعت گ سے تعبیر ہے۔ اور جب گ سیکڑ  
اکائی وقت اور ن فٹ اکائی فاصلہ ہو تو وہی سرعت گ سے تعبیر ہے۔ تو گ  
کی نسبت گ سے دریافت کرو پھلی اکائین فرض کرنے سے اکائی سرعت  
وہ حرکت ہے جس سے کہ ذرہ ک سیکڑ میں ن فٹ فاصلہ طے کرتا ہے۔  
اسلئے گ سرعت سے یہ مراد ہے کہ ذرہ ک سیکڑ میں ن فٹ فاصلہ طے  
کرتا ہے۔ یعنی ایک سیکڑ میں  $\frac{ن}{گ}$  فاصلہ طے کرتا ہے۔ اسلئے  
دوسری اکائین فرض کرنے سے ذرہ ایک سیکڑ میں  $\frac{ن}{گ}$  فٹ فاصلہ طے  
کرے گا مگر چونکہ حرکت ایک ہے پس  $\frac{ن}{گ} = \frac{ن}{گ}$  یعنی  
$$\frac{ن}{گ} = \frac{ن}{گ} = \frac{دو نو اکائی وقت و نسبت}{دو نو اکائی فاصلہ و نسبت}$$

(۱۳)۔ حرکت غیر یکسان کے بیان میں۔ جب ذرہ برابر وقت میں برابر  
فاصلہ طے نہیں کرتا تو اسکی حرکت غیر یکسان کہلاتی ہے۔ یعنی ذرہ کی  
سرعت مختلف اوقات میں مختلف ہوتی ہے۔ مگر کسی لحظہ مفروضہ میں اسکی سرعت  
معلوم ہو سکتی ہے۔ اگرچہ لحظہ مفروضہ کے مستقبل لحظہ میں سرعت مختلف ہوگی۔  
کسی لحظہ مفروضہ میں غیر یکسان سرعت کے ماننے کا قاعدہ ذیل ہے۔  
ہم قیاس کر سکتی ہیں کہ ذرہ کی حرکت بہت تھوڑے عرصہ تک یکسان  
ہی اور اسکا مقدار اس عرصہ تک ویسا ہی ہے جو اسکی شروع میں تھا

اس حساب سے جتنا فاصلہ ذرہ ایک کاسی وقت میں طے کر رہا ہے۔  
 وہی اوس لحظہ میں اوسکی سرعت کو تعبیر کریگا۔ اسکا یہ نتیجہ ہے کہ جب  
 کوئی سرعت ہر ایک لحظہ میں بدلتی جائے تو اوسکا مقدار دریافت کر سکی  
 بہت تھوڑے سے وقت کے لئے اوسے غیر تبدیل فرض کرنا چاہیے جیسے  
 محیط دائرہ کے پیمائش کے لئے ہم اوسکی بہت چھوٹی حصہ کو خط مستقیم  
 فرض کرتی ہیں

(۱۴) دنیا میں غیر یکساں حرکت کے مثیلین یکساں حرکت کے  
 نسبت زیادہ ہیں۔ اور کسی وقت یا فاصلہ میں اوسکے اندازہ کرنی کا طریقہ  
 بھی آسان ہے۔ مثلاً ہم جانتی ہیں کہ ریل گاڑے یکساں سرعت سے  
 نہیں چلتی۔ شروع میں اوسکی سرعت بڑھتی ہوئی درمیان میں بہت بڑی ہوتی  
 ہے۔ اور بعد ازاں رفتہ رفتہ گہٹی جاتی ہے۔ مثلاً جب ہم کہتی ہیں کہ فاصلہ  
 طے شدہ درمیان کسی مقام پر اوسکی سرعت ۵۰ میل فی گھنٹہ تھی۔  
 تو اسے یہ مراد ہے کہ اگر گاڑی ایک گھنٹہ تک اوسی سرعت سے چلا جائے  
 تھی چلتی تو ایک گھنٹہ میں ۵۰ میل طے کر لیتی۔ اس طرح جب کوئی شے اوپر  
 سے نیچے کے طرف گر رہی ہے تو ہم جانتی ہیں کہ باعث کشش ثقل اوسکی سرعت  
 ہر ایک لحظہ میں بڑھتی جاتی ہے۔ لیکر یہ کہتی ہیں کہ کسی مفروضہ سیکیڈ میں  
 اوس شے کی سرعت ۳۲ فٹ فی سیکیڈ ہے تو اس سے یہ مراد ہوتی ہے  
 کہ اگر وہ شے ایک سیکیڈ تک اوسی سرعت سے یکساں چلی تو ۳۲ فٹ  
 فاصلہ طے کریگی

(۱۵) جب غیر یکساں سرعت کا بیان ہو تو کسی مقام مفہم وضع پر کسی لحظہ مفروضہ میں بہت تھوڑے سے وقت تک اوس سرعت کو یکساں سمجھ کر یکساں سرعت کا قاعدہ اوس خاص مقام پر عمل میں لانا چاہیے۔ لیکن یہ یاد رکھنا چاہیے کہ ہر انداز سرعت کا لحظہ اوس تھوڑے سے وقت کے لئے ہی۔ دوسری لحظہ میں سرعت مختلف ہو گے

(۱۶) اس باب کی شروع میں متعلم کو یاد رکھنا چاہیے کہ سرعت کوئی طاقت نہیں ہے بلکہ طاقت کا نتیجہ یا اثر ہے یعنی طاقت ذرہ یا جسم پر عمل کر کے حرکت پیدا کرتی ہے اسلئے یہ کہنا درست نہیں کہ سرعت ذرہ یا جسم پر عمل کرتی ہے۔ اور یہ بھی یاد رکھنا چاہیے کہ حرکت کے لئے طاقت کا ذرہ یا جسم پر برابر عمل کرنا ضرور نہیں۔ طاقت تھوڑے دیر عمل کر کے جو حرکت پیدا کر لگی اوسی حرکت سے چپم رہیگا۔ مثلاً اگر کسی لکڑی سے گھسی جسم کو ٹھوکر لگائی جائے تو جب تک لکڑی جسم سے مس کرتی رہے گی تب تک طاقت حمل کر لگی لیکن اوسکی بعد ہی جسم متحرک رہیگا۔ اگر طاقت پی در پی عمل کرے تو ہر ایک لحظہ حرکت بڑھتی جائیگی۔ اسکا پورا بیان حرکت کی دوسری قانون کے ذکر میں کیا جائیگا

## ۲۔ مثلاً باب اول

(۱)۔ دو نقطہ یکساں سرعت کے ساتھ چلتی ہیں۔ ایک ۱۰ سیکنڈ میں ۵ فٹ فی سیکنڈ اور دوسرا ۱۰ اگر فی منٹ تواند و نو نقطوں کے سرعتوں کے

نسبت دریافت کرو

جواب ۱۱۲

(۲) ایک ریل گاڑی دو گھنٹہ میں ۱۰۰ میل چلتی ہے تو سیکنڈاؤر فٹ کی اکائیوں میں اوسط سرعت دریافت کرو

جواب ۱۱۲

(۳) ایک ریل گاڑی گھنٹہ میں ۵۰ میل چلتی ہے تو فٹ اور سیکنڈ کی حساب سے اوسط سرعت دریافت کرو

جواب ۴۴

(۴) ایک ریل گاڑی لاہور سے کلکتہ تک ۱۳۰۰ میل فاصلہ ۷ گھنٹہ میں طی کرتی ہے تو اوسط سرعت ایک گھنٹہ میں دریافت کرو۔ اور اوسط حساب سے

لاہور سے دہلی تک جو ۲۵۰ میل کی فاصلہ پر ہے کتنی وقت میں پہنچے گی

(۵) زمین اپنے محور پر ۲۴ گھنٹہ ۲۰ منٹ میں ایک دفعہ گھوم جاتی ہے اور اس کا قطر ۷۹۲۵ میل ہے تو خط استوا پر کسی ذرہ کی سرعت بحساب فٹ اور سیکنڈ کی کیا ہوگی

(۶) زمین ۳۶۵ دن ۶ گھنٹہ میں سورج کی گرد ایک دفعہ گردش کرتی ہے اگر اوسط حرکت ایک دائرہ میں ہو جبکہ نصف القطر ۹۵۰۰۰۰۰ میل ہے تو

ایک منٹ میں کتنا فاصلہ طے کریگی

(۷) آفتاب سے زمین پر شعاع کے پہنچنے میں ۸ منٹ ۲۰ سیکنڈ صرف ہوتی ہیں تو ایک سیکنڈ میں شعاع کی سرعت معلوم کرو

(۸) چاند کا فاصلہ کرہ زمین سے ۲۴۰۰۰۰ میل ہے تو معلوم کرو کہ ایک ٹی کا گولہ ہر ایک سیکنڈ میں ۵۰۰ گز تک حرکت سے چکر چاند تک کتنی وقت میں پہنچے گا

جواب ۲۴۰۰۰۰

(۹) کوئی یہ جبکہ قطر ایک گز ہے دو گنہٹہ میں گز فاصلہ طے کرتا ہے تو یہی مرکز اور محیط کی کسی نقطہ کو سرعتوں کے نسبت دریافت کرو

(۱۰) میانیر سے اتر ۲۵ میل کے فاصلہ پر ہے میانیر میں ۱۲ بجی دن کے ایک توپ چلی اگر آواز فی سیکنڈ ۱۰۹۰ فٹ فاصلہ یا ان حرکت سے طے کرے تو اتر تیر میں آواز کتنی دیر میں سنائی دیگی

جواب ۲ منٹ ۲۳ سیکنڈ  
(۱۱) کسی بادل سے بھلی چمکی اور ۱۰ سیکنڈ کو بعد گرج سنی گئی۔ بھلی کا چمکنا اور آواز کا پیدا ہونا ایک ہی لمحہ میں واقع ہوا۔ لیکن بھلی کے چمکے پہنچنے میں کچھ دیر نہیں لگی تھی۔ اور آواز کی یکساں سرعت فی سیکنڈ ۱۰۹۰ فٹ ہے تو معلوم کرو کہ بادل کتنی دور ہے

جواب ۲۵۰۶۲ میل  
(۱۲) ایک یکساں سرعت ۳۳ میل فی گنہٹہ ہے اگر گز و منٹ اکاٹن فرض کیا جائے تو وہ سرعت کس عدد سے تعبیر کی جاتی ہوگی

جواب ۸۸  
اس کوئی مسافر یکساں رفتار سے چمکے ۲ گنہٹہ میں ۲ میل فاصلہ طے کرتا ہے اور اس کی سرعت عدد ۲ سے تعبیر کی جاتی ہے اگر افٹ ایکسانی فاصلہ ہو تو اکاٹن وقت کیا ہوگی

جواب ۳۰ سیکنڈ  
(۱۳) ایک گہری چوٹی سوئی کا طول ۲ انچ ہے اوپر سوئی کا ۱/۲ انچ۔ انکی نوکوں کی سرعتوں کی نسبت دریافت کرو

جواب ۲۱:۱  
(۱۵) دو ذرہ کسی ایک نقطہ سے دو خطوط مستقیم کے سمتوں میں گ اور گ یکساں سرعتوں کے ساتھ چلی اوکئی سمتوں کا زاویہ میدان ۵۵ ہے تو اس وقت میں ان دونوں کا فاصلہ ایک دو مرتبے سے معلوم کرو



جواب مسئلہ نمبر ۲۰۲ - ۲۰۳ - ۲۰۴ - ۲۰۵

(۱۷) دو نقلی یکسان سرعت سے چلتی ہیں۔ انہیں سے ایک دائرہ کی محیط اور دوسرا اس کی قطر کا ایک ہی وقت میں طے کرتا ہے۔ اوکئی سرعتوں کی نسبت دریافت کرو

جواب ۲۲:۷

## باب دوم اسراع کی بیان میں

(۱۷) - سرعت غیر یکسان دو قسم کی ہوتی ہے۔ اول وہ جبکہ سرعت کو کمی یا بیشی یکسان ہو یعنی اس کے کمی بیشی کا مقدار برابر وقت میں یکسان ہو خواہ وہ وقت کتنا ہی قلیل فرض کیا جاوے دوم وہ جبکہ سرعت کو کمی بیشی کا مقدار برابر وقت میں یکسان ہو

(۱۸) اول قسم کی سرعت غیر یکسان میں زیادتی یا کمی درجہ بدرجہ ہوتی ہے اور اسکی زیادتی یا کمی ذرہ کے وقت حرکت کے متناسب ہوتی ہے۔ کسی مفروضہ اکائی وقت میں سرعت کو ایسی زیادتی کو اسراع کہتی ہیں۔ لیکن سرعت کے کمی نفی زیادتی فرض کرنے سے کچھ ہرج بہن ہوتا۔ اسلئے جس عدد سے اسراع تعبیر کیا جاوے گا۔ اس کے ساتھ علامت نفی یا اثبات سے معلوم کرنا چاہیے کہ آیا وہ سرعت کی کمی یا زیادتی کو تعبیر کرتا ہے

(۱۹) اسراع یکسان کا بیان۔ جب ذرہ کی سرعت ہر ایک لمحہ میں یکساں طور سے متغیر ہو تو مشاہدہ سے معلوم ہو سکتا ہے کہ کمی مفروضہ اکائی وقت میں

چونکہ سرعت تدریجہ اور سرعت متناقصہ کے لئے کوئی عمدہ لفظ نہیں ملا سکی اور کوئی  
تایم مقام لفظ اسراع کا استعمال کیا گیا ہے \*

وہ سرعت بمقدار گستی اکائین سرعت کے متغیر ہے تو جو وہ سرعت کی ان اکائیوں  
تعبیر کر گیا وہی ذرہ کے اسراع کو تعبیر کر گیا۔ مثلاً فرض کرو کہ ایک ذرہ کس لحاظ  
۳۲ فٹ فی سیکنڈ سرعت کی ساتھ چلا رہا ہو اور اسکی حرکت درجہ بدرجہ یکساں طور پر  
بڑھتی جاتی ہے۔ اور ایک سیکنڈ کے بعد اسکی سرعت ۴۸ فٹ فی سیکنڈ  
ہے۔ اور اسکی ایک سیکنڈ کے بعد ۶۴ فٹ فی سیکنڈ ہے۔ تو ہم  
کہہ سکتے ہیں کہ ذرہ کا اسراع ۸ ہے یعنی ہر ایک سیکنڈ میں ذرہ کی سرعت ۸  
فی سیکنڈ بڑھتی ہے۔ اور اس طرح اگر ایک سیکنڈ کے بعد سرعت کم ہو کر  
۲۰ فٹ فی سیکنڈ ہوتی۔ تو ہم کہتی ہیں کہ یہاں اسراع ۱۲ ہے یعنی یہاں ذرہ کی  
سرعت ہر ایک سیکنڈ میں بحساب ۱۲ اکائیوں سرعت کے کم ہوتی ہے۔ واضح  
ہو کہ اسراع کے مقدار ماننے کے لئے ہم نے اسراع کو اکائی فرض کیا  
جس سے ذرہ کی سرعت ایک اکائی وقت میں بحساب ایک اکائی سرعت  
کو بڑھتی ہے۔ یعنی جب ہم کہتی ہیں کہ اسراع ۸ ہے تو چارے یہ مراد ہے  
کہ وہ اسراع اکائی اسراع کا گنا ہے۔ یعنی اگر ذرہ کی سرعت ہر ایک سیکنڈ میں  
بحساب اکائی سرعت کے بڑھتی ہو۔ تو اسکو (۱) اکائی اسراع فرض کیا ہے  
مگر سرعت ہر ایک سیکنڈ میں بحساب (۲) اکائی سرعت کے بڑھتی ہو اسکو (۲) اکائی  
اسراع فرض کیا ہے۔ اور علیٰ ہذا القیاس

(۲) اس طرح جب ہم کہتی ہیں کہ اسراع ۸ ہے تو سمجھنا چاہیے کہ ایک اکائی  
وقت میں ذرہ کی حرکت یکساں طور سے بحساب ۸ اکائیوں سرعت کو بڑھتی ہے  
۱۔ اگر ذرہ اس تبدیل سرعت کے ساتھ ۸ اکائی وقت تک چلتا

تو اسکی سرعت میں  $E$  سے اکا میں سرعت کی زیادہ ہونگی۔ اور اگر اس وقت کے شروع میں ذرہ کی سرعت گ ہو تو اس وقت کو انجام میں گ  $+E$  سے ج کی پس اگر اس وقت کے انجام میں ذرہ کی سرعت ل سے تعبیر ہو تو

$$L = گ + E$$

واضح ہو کہ اگر اس وقت کے شروع میں ذرہ ساکن ہو تو مساوات مذکورہ بالا میں گ = ۰ پس اس صورت میں  $L = E$  سے۔ اگر ذرہ کا اسراع صحت گ کی سمت مخالف میں ہو تو اس اسراع کو  $-E$  سے تعبیر کرتے ہیں۔ اور اس صورت میں  $L = گ - E$

(۲۱) اس وقت کے انجام میں ذرہ کے کل سرعت کو اسکی سرعت محصلہ کہتے ہیں اور اس وقت کو شروع کے سرعت کو اس کے ابتدائی سرعت کہتے ہیں \* سرعت محصلہ ہر ایک نقطہ میں بدلتی جاتی ہے یعنی اس کو غیر یکساں سرعت سمجھنا چاہئے اور حد ۱۳- میں جو غیر یکساں سرعت کے معنی اور اس کے ماپنے کا طریقہ بیان کرنا شروع میں اس جگہ بھی عمل میں آئے گئے \*

(۲۲) سرعت کی طرح اسراع کو بھی خط مستقیم سے تعبیر کرتے ہیں۔ مثلاً اگر ذرہ کا اسراع مستوی  $E$  ہے یعنی ایکہ اکائی وقت میں اسکی سرعت بحساب  $E$  اکائیوں سرعت کے زیادہ ہوتی ہے ہر جگہ جو خط مستقیم  $E$  اکائیوں سرعت کو تعبیر کرتا ہے وہی خط اسراع کو بھی تعبیر کرے گا پس سرعت اور اسراع میں صرف اتنا فرق ہے کہ سرعت سذرہ کے درجہ درجہ پیغام کی تبدیلی مراد ہے اور اسراع سے اس کے درجہ درجہ سرعت کی

تبدیلی مراد ہوگی

(۲۳) چونکہ اسراع اکائی سرعت سے پایا جاتا ہے اسلئے اکائی سرعت کے مختلف لینے سے ایک ہی اسراع مختلف حدود میں سے تعبیر ہوگا۔ لیکن اکائی وقت اور اکائی فاصلہ مختلف فرض کرنے

سے اکائی سرعت مختلف ہوتی ہو (دیکھو حدود ۱۲) لہذا اکائی وقت اور اکائی فاصلہ مختلف فرض کرنے سے خاص اسراع کے تعبیر کرنیوالا عدد بھی مختلف ہوگا۔

مثلاً جان اکائی وقت ایک سیکنڈ اور اکائی فاصلہ ایک فٹ ہو ان اکائی سرعت وہ سرعت ہو جس سے ذرہ ایک سیکنڈ میں یکساں حرکت سے

ایک فٹ فاصلہ طے کرتا ہے۔ فرض کرو کہ کوئی مفروضہ اسراع عدد ۵ سے تعبیر ہوتا ہو یعنی ہر ایک سیکنڈ میں ذرہ کی سرعت بحال ہفت سیکنڈ زیادہ ہوتی ہو۔ اب اگر ہم ایک فٹ

اور ایک گز کو جدا گانہ اکائی وقت اور اکائی فاصلہ فرض کریں تو اکائی سرعت وہ سرعت ہوتی جس سے ذرہ ایک منٹ یعنی ۶۰ سیکنڈ میں ایک گز یعنی ۳ فٹ فاصلہ طے کرتا ہو اور وہ اسراع

اکائی اسراع ہوگا جس سے ذرہ کی سرعت ہر ایک منٹ میں بحال ایک گز فی منٹ زیادہ ہوتی ہے۔ اب ۵ فٹ فی سیکنڈ برابر ہے  $\frac{۶۰ \times ۵}{۳}$

گز فی منٹ اور ہر ایک سیکنڈ میں سرعت کی اس حساب سے تبدیلی برابر ہو

ہر ایک منٹ میں  $\frac{۶۰ \times ۵}{۳}$  گز فی منٹ اگر حساب سے تبدیلی اسلئے دسی

مفروضہ اسراع منٹ اور گز کے حساب عدد ۶۰۰ سے تعبیر ہوگا۔

(۲۴) جبکہ اس سیکنڈ اور فٹ جدا گانہ اکائی وقت اور اکائی فاصلہ

کوئی اسراع مفروضہ عدد سے تعبیر ہوتا ہو اور وہی اسراع جسے تعبیر

ہوتا ہے۔ جبکہ اس سیکنڈ اور فٹ جداگانہ اکائی وقت اور اکائی  
فاصلہ میں توغ اور ع کے درمیان نسبت دریافت کرو۔  
اول کی اکائین فرض کرنے سے اس طرح سے یہ مراد ہو کہ ہر ایک اس سیکنڈ  
میں ذرہ کی سرعت بہ حساب ع × ف فٹ فی اس سیکنڈ کے زیادہ ہوتی ہو۔  
اب فی اس سیکنڈ میں سرعت کی زیادتی بحساب ع × ف فٹ فی اس  
سیکنڈ کے = فی اس سیکنڈ میں سرعت کی زیادتی بحساب ع × ف فٹ  
فی سیکنڈ کے = ہر ایک سیکنڈ میں سرعت کی زیادتی بحساب ع × ف فٹ  
فی سیکنڈ کے اسی طرح دوسری اکائین فرض کرنے سے اس طرح سے یہ مراد ہو  
ہے کہ ہر ایک سیکنڈ میں ذرہ کی سرعت کی زیادتی بحساب ع × ف فٹ  
فی سیکنڈ کے ہر ایک اس طرح ایک بھی ہو۔

$$\frac{ع \times ف}{س} = \frac{ع \times ف}{س}$$

$$\frac{ع}{س} = \frac{ع \times ف}{س \times ف} = \frac{ع}{س} \times \frac{ف}{ف}$$

(۲۵) اس طرح تبدیل کے بیان میں - جب ذرہ کے سرعت برابر وقت میں برابر  
طور پر کم یا زیادہ نہ ہو یعنی اگر مختلف لمبوتوں میں اسکی زیادتی یا کمی مختلف  
ہو تو اس طرح کو غیر یکساں کہتے ہیں۔ ایسی حالت میں کسی مخصوص  
لمبوت میں سرعت کی زیادتی یا کمی کے معلوم کر نیکاطریقہ یہ ہے کہ ہم فرض کرتے  
ہیں کہ لمبوت غیر متغیر کے شروع سے ایک اکائی وقت تک اس طرح

یکساں رہتا ہے اور اس کا مقدار وہی ہوتا ہے جو لحظہ مفروضہ کے شروع میں تھا تو جو عدد اس کا ہی وقت میں سرعت کی کمی یا زیادتی کو تعبیر کرتا ہے وہی عدد اس لحظہ کے شروع کو بھی تعبیر کرے گا واضح ہو کہ بہت تھوڑے سے وقت تک اس نوع کی یکساں فرض کرنے سے کچھ غلطی واقع نہ ہوگی مقدار مستبدل کے ماننے کا قاعدہ ہر جگہ اس طرح کا ہے (دیکھو عدد ۱۳)

(۲۶) واضح ہو کہ اسراع ذرہ پر طاقت عاملہ کا اثر ہے۔ اگر یہ طاقت مستقل ہو تو اسراع پیدا شدہ بھی یکساں ہو گا یعنی اس طاقت کے اثر سے ذرہ کی سرعت ہر لحظہ میں یکساں ملے۔ پر زیادہ ہوتی جائیگی اگر وہ طاقت متحرک ذرہ کی حرکت کے مخالف سمت میں عمل کرے تو اسکے اثر سے موجود سرعت درجہ بدرجہ گھٹتی جاوے گی۔ اس لئے سمت حرکت کی مخالف سمت کا اسراع اصل میں ذرہ کی سرعت کو گھٹاتا ہے پس ہم اس طرح کی اسراع کو منفی سمجھتے ہیں۔ جب طاقت عاملہ کا مقدار مستبدل ہوتا ہے تو اسکے اثر سے مستبدل اسراع پیدا ہوگا۔ لیکن جب ہم ذرہ کے اسراع کا ذکر کرنیکی تو طاقت عاملہ پر خیال کرنیکی کچھ ضرورت نہیں۔ وہاں صرف ذرہ کی حرکت اور قسم حرکت کا خیال کرنا کافی ہے۔ کونسی طاقت کس قسم اور کس اندازہ کی حرکت پیدا کرتی ہو ان باتوں کا بیان شے متحرک کی جسم سے تعلق رکھتا ہے اور اسکا بیان آئندہ آویگا

### سوالات باب دوم اسراع

(۱) کسی شے کا اسراع بہ سبب کشش ثقل کے فی سائنڈ ۳۲.۲ فٹ کے حساب سے

اگر ۱۰ سیکنڈ اکائی وقت فرض کیا دے تو وہی اسراع کس عدد سے تعبیر ہوگی  
(۱۲) اگر ۱۰ سیکنڈ اکائی وقت اور ایک گز اکائی فاصلہ ہو تو اسراع ۳۲ فٹ فی سیکنڈ  
کس عدد سے تعبیر ہوگی  
جواب ۱۰۶۶۵۶

(۱۳) اگر ۱۰ سیکنڈ اور ۱۰ فٹ جدا گانہ اکائی وقت اور اکائی فاصلہ فرض  
کرنے سے کوئی اسراع عدد ۷ سے تعبیر ہو تو ایک سیکنڈ اور ایک فٹ اکائی  
وقت کرنے سے وہی اسراع کس عدد سے تعبیر ہوگا۔

(۱۴) اگر ایک فٹ اکائی فاصلہ ہو اور اسراع ۳۲ فٹ فی سیکنڈ اکائی اسراع  
اکائی وقت دریافت کرو  
جواب ۱۷ سیکنڈ

(۱۵) ایک میل کو اکائی فاصلہ فرض کرنے سے اگر سرعت ۳۰ میل فی گھنٹہ کی عدد  
سے تعبیر ہو تو اسراع ۳۲ فٹ فی سیکنڈ کس عدد سے تعبیر ہوگا۔

جواب ۸۷۱۳۷

(۱۶) ایک میٹر ۱۹۵۳۰۰ انچ ہوتا ہے تو بتاؤ کہ سیکنڈ اور میٹر کی حساب  
کشش ثقل کس عدد سے تعبیر ہوگی  
جواب ۹۵۸

(۱۷) اگر ۵ سیکنڈ اکائی وقت ہو اور اسراع کشش ثقل عدد ۱۲ سے تعبیر  
ہو تو اکائی فاصلہ کیا ہوگی  
جواب ۵۵۵۵





$$= گس + عس + (ا + \frac{1}{2})$$

مگر حقیقت میں کسی کل حصہ وقت میں ذرہ کی سرعت یکساں نہیں ہے بلکہ ذرہ کی سرعت اس حصہ کی ابتدائی و انجام کے سرعتوں کی درمیان واقع ہے اور خواہ اس حصہ وقت کو کتنا ہی قلیل فرض کیا جائے تب بھی یہی کہہ سکیں گے۔ کیونکہ ذرہ کی سرعت ہر لمحہ میں زیادہ ہوتی جاتی ہے اسلئے اس میں جتنا فاصلہ ذرہ اس وقت میں طے کرتا ہے وہ ف و ف کے درمیان واقع ہے اور خواہ ہر ایک حصہ وقت کتنا ہی قلیل فرض کیا جاوے تب بھی یہی کہہ سکیں گے

مگر میں کو بہت ہی قلیل فرض کرنے سے یعنی ن کو بہت کثیر فرض کرنے سے ف و ف دونوں گس + عس کے برابر ہو گئی کیونکہ  $\frac{1}{2}$  بہت ہی قلیل ہو کر برابر صفر کے ہو جاتا ہے۔ پس اگر اصل فاصلہ طے شدہ ف سے تعبیر ہو تو ف = گس + عس

(۲۹) مساوات مذکورہ بالا اور طرح بھی ثابت ہو سکتی ہے۔ چونکہ ذرہ کی

سرعت یکساں طور پر بڑھتی ہے۔ پس نصف وقت کے اخیر میں ذرہ کی سرعت ابتدا اور انجام کی سرعتوں کا اوسط ہے یعنی اگر نصف وقت سے پیشتر اور بعد برابر دو وقتوں پر دو لمحوں کی سرعت کا لحاظ کیا جائے تو معلوم ہوگا کہ پہلی لمحہ کی سرعت نصف وقت کی سرعت سے اتنی کم ہے جتنی کہ بعد کے لمحہ کی سرعت نصف وقت کی سرعت سے زیادہ ہے۔ پس ذرہ اس وقت میں اتنا ہی فاصلہ طے کرے گا جو کہ وہ اوسط سرعت کے ساتھ برابر یکساں چلے گا اور اسی عرصہ میں

$$= (گ + ع) - گ + ع$$

$$\text{ب۔ ف} = (\text{رگ} + \text{ع س}) = \text{س} = \text{گ س} + \frac{\text{گ س}}{۲}$$

(۱) ثابت ہو چکا کہ ذرہ کی سرعت محصلہ ل = گ + ع س ..... (۱)

اور فاصلہ طے شدہ ف = گ س +  $\frac{\text{ع س}}{۲}$  ..... (۲)

$$\text{ب۔ ل} = \text{گ} + \text{م گ} + \text{ع س} + \text{ع س} = \text{گ} + ۲ + ۲ + \text{ع رگ س} + \frac{\text{ع س}}{۲}$$

$$= \text{گ} + ۲ + \text{ع ف} \dots\dots (۳)$$

ان تین مساواتوں سے ذرہ کی حرکت ہر ایک حالت میں معلوم ہو سکتی ہے

(۳) جب ذرہ کی سرعت گشتی جاتی ہے یعنی جب اسراع سرعت کے مخالف

سمت میں موجود ہوتا ہے تب اسراع ع کو علامت نفی سے بغیر کرنا چاہئے اس

صورت میں مساواتین مذکورہ بالا اسطر چہر لکھی جائیگی

$$\text{ل} = \text{گ} - \text{ع س} \dots\dots\dots (۱)$$

$$\text{ف} = \text{گ س} - \frac{\text{ع س}}{۲} \dots\dots\dots (۲)$$

$$\text{ل} = \text{گ} - ۲ - \text{ع ف} \dots\dots\dots (۳)$$

(۳) اگر اس وقت کے ابتدا میں ذرہ ساکن ہوتا تو گ = ۰، ل = ع س =

$$\text{ف} = \frac{\text{ع س}}{۲} \dots\dots (۲) \text{ ل} = ۲ = \text{ع ف} \dots\dots\dots (۳)$$

واضح ہو کہ چونکہ اسراع یکساں ہو تو اس لئے مساوات نمبر

(۳) و (۲) سے بیان ذیل معلوم ہوتا ہے

ا) اگر جب ذرہ حالت سکون سے متحرک ہوتا ہے تو کسی مفروضہ وقت

میں فاصلہ طے شدہ وقت کی مجذور کی متناسب

ہوتا ہے اور اسکے برعکس جب کسی وقت مفروضہ میں فاصلہ طے

شدہ وقت کو مجذور کے متناسب ہو تو معلوم ہو گا کہ ذرہ کا اسراع یکساں

(۲) — ذرہ حالت سکون سے متحرک ہو کر جو کچھ فاصلہ طے کرتا ہے

وہ فاصلہ اویسکے انجام میں سرعت حاصل کی مجذور کی متناسب ہوتا ہے

(۳) تعریف — اگر حالت سکون سے یکساں اسراع سے ذرہ

ف فاصلہ طے کرنے میں (ز) سرعت حاصل کرے تو ل کو ذرہ

سرعت حاصل ف فاصلہ میں کی گئی

(۴) دفعہ ۲۸ میں ثابت ہوا ہے کہ ذرہ ابتدائی سرعت گ اور اسراع

ع سے چکر س وقت میں گ س +  $\frac{1}{2} ع س$  فاصلہ طے کرتا ہے

پس (س) وقت میں ذرہ گ (س) +  $\frac{1}{2} ع (س)$  فاصلہ طے

کرتا ہے تو س دین اکائی وقت میں فاصلہ طے شدہ

= گ س +  $\frac{1}{2} ع س$  — گ (س) +  $\frac{1}{2} ع (س)$

= گ +  $\frac{1}{2} ع (س)$

یعنی اول اکائی وقت میں فاصلہ طے شدہ = گ +  $\frac{1}{2} ع$

دوسری اکائی وقت میں فاصلہ طے شدہ = گ +  $\frac{3}{2} ع$  وغیرہ

اگر ذرہ حالت سکون سے متحرک ہو تو گ برابر صفر کہ ہوتا اس صورت میں

اول اکائی وقت میں فاصلہ طے شدہ =  $\frac{1}{2} ع$

دویم میں ..... =  $\frac{3}{2} ع$

سیوم میں ..... =  $\frac{5}{2} ع$  وغیرہ

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ اول دویم سیوم وغیرہ اکائیوں وقت میں

فاصلہ طے شدہ جداگانہ عدد ۱ و ۳ و ۵ وغیرہ طاق اعداد کی متاسبتی  
(۳۵) — کوی ذرہ کسی نقطہ (۱) سے گ سرعت سے خط ۱ ب

سمت میں چلتا ہے اور اسکا اسراع — ع ہے تو ذرہ کا وقت حرکت جب  
وہ مقام ب پہنچتا ہے معلوم کرو اور اسکی آئندہ حرکت کا حال دریافت کرو  
فرض کرو کہ فاصلہ اب = ف اکایون فاصلہ کے اور وقت حرکت = س  
اکایون وقت کے بقوب موجب دفعہ ۲۸ ف = گ س — ع س

$$\begin{aligned} & \text{ع س} - ۲ \text{ گ س} + ۲ \text{ ف} = ۰ \\ & \text{گ} = \frac{\pm ۲ \text{ ف} - ۲ \text{ ع س}}{\text{ع}} \end{aligned}$$

اس مساوات سے ہم مندرجہ ذیل نتائج نکالتے ہیں  
(۱) اگر گ = ۲ ع ف تو س کو قیمت ناممکن ہے — یعنی اس حالت میں

ذرہ مقام ب تک نہیں پہنچ سکتا

$$(۲) \text{ اگر گ} = ۲ \text{ ع ف تو س} = \frac{\text{گ}}{\text{ع}}$$

مگر موجب حد (۳) ل = گ س ع س = ع (گ س — س)

گو یا گ وقت کے بعد ل = ۰

وقت گ کے بعد ل کے قیمت نفی ہوگی یعنی ذرہ کی سرعت محض اصل  
سے حرکت کی مخالف سمت میں ہوگی — اس سے معلوم ہوتا ہے کہ  
ذرہ صرف مقام ب تک پہنچتا ہے اور اسکی نہیں چلتا اور ایک لمحہ تک  
نقطہ ب پر ٹھہر کر سمت مخالف میں لوٹنا شروع کرتا ہے

(۳) اگر گ ۷۲ ع ف - قوس کے دو تیسٹین ہو سکتی ہیں

بوجب جبر و مقابلہ کے صورت مساوات سے معلوم ہوتا ہے کہ دو تیسٹین ثبت ہو گئی یعنی اس صورت میں ذرہ مقام ب پر دو دفعہ گزر گیا ایک دفعہ اصل سمت میں حرکت کرتی ہوئی اور دوسری دفعہ اپنا کل فاصلہ طے کر کے مخالف سمت میں لوٹتی ہوئی

چونکہ ل = گ سے اس لئے گ وقت کے بعد ل = یعنی گ وقت تک چلے گا ذرہ ایک لمحہ تک ساکن رہے کہ سمت مخالف میں لوٹنا شروع کر گیا اور گ وقت میں فاصلہ طے شدہ

= گ س - ع ۷۲ = گ ۷۲ - ع ۷۲ = گ ۷۲ - یعنی ذرہ گ سے اکائی فاصلہ کی طے کر کے سمت مخالف میں لوٹنا شروع کر گیا

(۴) جب ذرہ فاصلہ گ ۷۲ طے کر کے لوٹنا شروع کرتا ہے تو کہہ سکتی ہیں کہ ذرہ حالت سکون سے اسراع + ع کے ساتھ نقطہ ۱ کے سمت تیز حرکت کرتا ہے

۱ اگر نقطہ ۱ تک پہنچنے میں وقت س صرف ہو تو گ ۷۲ = ع ۷۲ س = گ

اس سے ظاہر ہے کہ جب تا وقت ذرہ کو نقطہ ۱ اپنا کل فاصلہ اصل سمت میں طے کرنے میں صرف ہوتا ہے اور تا ہے وقت واپس نقطہ ۱ تک پہنچنے میں صرف ہوتا ہے اور نقطہ ۱ سے چلکر پہر نقطہ ۱ پر واپس آنے میں ۲ گ وقت صرف ہوتا ہے

(۵) ل = گ - ع س . ابتدا سے ۲ گ / وقت کی انجام میں

ذرہ کی سرعت مصلہ = گ - ع یا گ = گ

اس سے ظاہر ہے کہ جب ذرہ نقطہ ۱ پر لوٹ آتا ہے تو اس کی سرعت

عدد ابتدائی مقدار حرکت کے برابر ہوتی ہے مگر سمت میں مخالف

(۳۶) ذرہ کا وقت واپس نقطہ ۱ تک پہنچنے میں ایک اور طریقہ سے

یہی دریافت ہو سکتا ہے ہم جانتے ہیں کہ اس وقت میں فاصلہ طے شدہ

= گ س - ۱/۲ ع س

نقطہ ۱ پر ذرہ کا فاصلہ طے شدہ = ۰ پس اگر ذرہ اپنا کل فاصلہ طے

کرنے اور نقطہ ۱ تک واپس آنے میں وقت س صرف کرے

تو . = گ س - ۱/۲ ع س

س = ۰ یا ۲ گ / ع

س کی اول قیمت اس وقت کو تعبیر کرتی ہے کہ جب ذرہ نقطہ ۱ سے حرکت

کر سیکو تیار ہے

س کی دوسری قیمت اس وقت کو تعبیر کرتی ہے کہ جب ذرہ نقطہ ۱ سے

چکر اپنا کل فاصلہ طے کر کے واپس نقطہ ۱ پر پہنچ جاتا ہے

اس طرح چونکہ ل = گ - ۲ ع ف جب ذرہ اپنا کل فاصلہ مسلسل سمت میں

طے کر چکنا ہے تو ل = ۰ یا ۲ گ - ۲ ع ف ۰ کل طے شدہ

فاصلہ (۳۷) گ س طالعہم زود فہم سا ٹوٹن مدکورہ بالا سے بہت سے

نتائج خود نکال سکتے ہیں جن کا اس جگہ بیان کرنا مقبول ہے

(۳۸) تجربے معلوم ہوا ہے کہ جب گوی شے اوپر سے نیچی کھیرف پہنکی جاوے یا خود گرتو اسکی سرعت کش زمین کے باعث ایک یکسان اسراع سے ہوتی جاتی ہے اس اسراع کی ناپ فی سیکنڈ ۳۲.۲ فٹ ہے۔ آسانی کے لئے اس خاص اسراع کو ہمیشہ حرف ق سے تعبیر کیا جائیگا

اس تبدیلی مقدار حرکت کے خواص اور اسکی ناپنے کا طریقہ وغیرہ آئندہ بیان ہوگا۔ ابجگہ تناہی فرض کافی ہے کہ کش ثقل سے کسی متحرک جسم حرکت بحباب ق اسراع کے زمین کے مرکز کھیرف زیادہ ہوتی ہے

پس ظاہر ہے کہ اگر ہم کسی جسم کی حرکت جو سمت الراس میں پہنکا گیا ہو یا گرا ہو معلوم کرنا چاہیں تو کل نتائج جو ہم نے صود مذکورہ بالا میں بابت یکسان اسراع کی ثابت کر چکی ہیں ابجگہ ہی عمل میں آویں گے۔ فرق صرف اتنا ہی ہوگا کہ جہاں ہم نے اون حد و دین اسراع کے واسطے حرف ق رکھا ہے وہاں اومصورت میں جب جسم نیچی کھیرف گرتا ہو (+ ق) اور جب اوپر کھیرف پڑتا ہو (- ق) رکھنا چاہیے۔

اس باب کے اخیر میں بہت سے مثالیں کش ثقل کے متعلق دی گئی ہیں جن سے مختلف حالتوں میں وزہ کی حرکت کا حال معلوم ہوگا

باب چھار دھم میں ہم اس جسم کی حرکت کا حال بیان کرینگے جو خاص سمت راس مختلف سمت میں پہنکا گیا ہو یا گرا ہو۔ جب ہم کہتے ہیں کہ وزہ حرکت کرتا ہے تو ہمارے مراد ہمیشہ یہ ہوتی ہے کہ وزہ خلا میں حرکت کرتا کیونکہ ہوا کا اثر وزہ کی حرکت میں اتقدر تبدیلی پیدا کرتا ہے کہ اسکا

بیان اس رسالہ ابتدائی نین نہیں کیا جاسکتا

## مشالات باب سوم

(۱) کسی ذرہ کا اسراع ۵ ہے تو ابتدائے کستنی وقت میں اس کی سرعت  
برابر ۲۰ کیہ ہو گے اگر ذرہ کی سرعت ابتدائے ہوتی تو کستنی وقت میں سرعت  
محصولہ برابر ۲۰ کے ہوگی جواب (۱) ۳ اکائی وقت (۲) ۴ اکائی

(۲) کوئی ذرہ جس کی سرعت ابتدای ۱۲ اسراع یکسان سے حرکت کرتا ہی  
ابتدائے پہلے ۸ اکائی سے وقت کی انجام میں اس کی سرعت محصلہ برابر ۲۰ کے ہوتی  
ہے تو اس کا اسراع دریافت کرو جواب ۱۰

(۳) کسی ذرہ کی سرعت بحباب ۳۲ اکائیوں اسراع کے کم ہوتی ہے  
کسی معروضہ نقطہ میں معلوم ہوا کہ اس کے سرعت ۹۶ ہے تو کستنی وقت  
میں ذرہ حالت سکون کو پہنچ جائیگا جواب ۳ اکائی وقت

(۴) کسی ذرہ کا سرعت ابتدائی ۵ ہے - اور اسنی شروع سے  
۳ اکائیوں وقت میں ۱۸ اکائین فاصلہ کی طے کین۔ تو اس کا اسراع  
دریافت کرو جواب ۶ -

(۵) کسی ذرہ کی سرعت ابتدائی ۱۰ ہے ۳ اکائیوں فاصلہ کے طے کر کے  
وہ سرعت ۸ حاصل کرتا ہے تو اس کا اسراع دریافت کرو جواب ۶ -



(۶) کسی ذرہ کا اسراع فی منٹ بحباب ۳۰۰ گز ہے تو بتلاؤ کہ حالت سکون سے چلکر کتنا فاصلہ طے کرنے میں اس کے سرعت محصلہ برابر ۲۴ فٹ فی سیکنڈ کی ہو سکے گی

جواب ۱۸۰۰ فٹ

(۷) دیکھا گیا کہ کسی ممتد وضعہ سیکنڈ میں ذرہ ۷ فٹ فاصلہ طے کرتا ہے اور اس سیکنڈ کے تیسری اور چوتھی سیکنڈ میں جدا گانہ ۱۱ فٹ فاصلہ طے کرتا ہے تو بتلاؤ آیا ذرہ کا اسراع یکساں یا غیر یکساں ہے اور اسراع کا تعداد ہے دریا نسبت کر دو

جواب (۱) یکساں (۲) ۲

(۸) کسی ذرہ کی سرعت ابتدا گ ہے اور اس کی سرعت بحباب ع اسراع کے زیادہ ہوتے ہے اگر ذرہ وقت میں ف فاصلہ طے کرے اور اس وقت کی انجام میں اس کے سرعت محصلہ ہو تو ثابت کر دو

$$ک = \frac{ل - گ}{ع} = \frac{۲}{ل + گ} = ۳$$

(۹) کوئی ذرہ اسراع سے حرکت کر رہا ہے اگر ف فاصلہ کی ابتدا اور انجام کے سرعتوں کا اوسط برابر ۱ کے ہو اور اس فاصلہ کے طے کرنے میں اس کے سرعت معیار د سے زیادہ ہوئے ہو تو ثابت کر دو کہ

$$۱ = د = ع ف$$

(۱۰) دیکھا گیا کہ کوئی ذرہ پہلی چار سیکنڈ میں ۲۴ فٹ فاصلہ طے

کرتا ہے اور دوسری ۲ سیکنڈوں میں ۶۴ فٹ - تو اس کی سرعت

ابتدائی و اسراع دریافت کرو جواب (۱) ۱

(۲) ۲۵۵

(۱۱) کوی دزہ سرعت ابتدائی گ سے حرکت کر کے سرسین  
وس وین سیکنڈ میں جب اگلا نہ ف و ف فاصلہ طے کرتا ہے  
تو ن دین سیکنڈ میں کتنا فاصلہ طے کریگا

(ف-ف) (ن-۱)

جواب گ + ۲ (س-س)

(۱۲) کوی دزہ حالت سکون سے اسراع ۸ سے حرکت کرتا ہوا  
۵ سیکنڈ میں ۵۰ فٹ فاصلہ طے کرتا ہے اور اس وقت کے انجام  
میں اس کی سرعت محصلہ ۲۰ ہے ۱ بجگہ اکائی وقت اور اکائی فاصلہ  
کیا ہے جواب اکائی وقت = ۲ سیکنڈ اکائی فاصلہ = ۳ فٹ

(۱۳) کوی دزہ کسی نقطہ مفروضہ سے اسراع صحیح گیارہ حرکت کرتا ہے  
اور ۳ سیکنڈ کے بعد ایک اور دزہ ۱ او سے نقطہ سے سرعت کیا  
گ سے چلا تو ثابت کرو کہ اگر گ < ۲ سس تو دو نو دزہ ایک دوسری  
سے دو دفعہ اگر ٹینگے

(۱۴) کوی دزہ حالت سکون سے اسراع کیا گ کے ساتھ حرکت کرتا ہے  
اور س وین وس وین سیکنڈ میں جب اگلا نہ ف و ف فاصلہ طے کرتا ہے  
تو دریافت کرو کہ (س + س) دین سیکنڈ میں کتنا فاصلہ طے

کر گیا  
جواب ف + ف + ف + ف + ف - ف  
مثال ۱۳ مندرجہ ذیل کش رنین کے باعث سے گرتی ہوئی جسموں کے حرکت  
متعلق ہیں۔ اور سوای اون تعاون کے جہان اسکے عکس کھا جاوے  
ہمیشہ سراع برابر ۳۲ فٹ فی سیکنڈ فرض کرنا چاہئے

(۱۵) دریافت کرو کہ کوی نیچے گرتا ہوا جسم ۱۸ سیکنڈ میں کتنا فاصلہ نیچے  
گرا گیا جواب ۲۹۶ فٹ

(۱۶) کوی نیچے گرتا ہوا جسم اول و دوم و سیوم سیکنڈ میں جب اگلا نہ کتنا  
فاصلہ نیچے گرتا ہے جواب ۱۶ و ۸ و ۸۰ فٹ

(۱۷) کوی جسم ابتدائی سرعت ۸۰ فٹ فی سیکنڈ کے ساتھ اوپر  
کی طرف سمت الراس میں پھینکا گیا تو معلوم کرو کہ وہ کتنی اونچائی تک چڑھ  
سکیگا جواب ۱۰۰ فٹ

(۱۸) قطب صاحب کرینیا کی چوٹی سے جبکہ اونچائی ۲۵۰ فٹ ہے  
کوی جسم گرا تو دریافت کرو کہ کتنی وقت میں سطح زمین پر پہنچے گا۔

اور یہ بھی بتاؤ کہ اگر جسم مذکور زمین پر ایک سیکنڈ میں آ پہنچے تو کتنی  
سرعت ابتدائی سے پہنچا ہوا تھا جواب (۱) قریباً ۱۳۲ سیکنڈ (۲) ۱۳۲

(۱۹) کسی گرتے ہوئی جسم کے ۲۵۰ فٹ فاصلہ نیچے گرنے میں سرعت  
کیا ہو گے جواب ۱۲۰

(۲۰) ایک گولی سرعت ۱۰۰ فٹ فی سیکنڈ کے ساتھ اوپر کی طرف  
سمت الراس میں محذوف ہوئی اور ایک سیکنڈ کے بعد ایک اور گولی او

مقام سے سرعت ۲۰ فٹ فی سیکنڈ کے ساتھ اوپر سمت پر مجھڑا  
ہو۔ تو معلوم کرو کہ کس جگہ اور کتنی دیر میں دو نو ایک دوسری

جواب، (۱) ۲۸ فٹ

ملینگی

(۲) ۲۵ سیکنڈ

(۲۱) کوئی ذرہ ایک مینار کے چوٹی سے گڑا اور اسے نقطہ میں ایک  
اور ذرہ اسی مینار کے تلے سے اوپر کھینچا گیا دو نو ذری مینار کے عین  
وسط میں اگر ملے۔ تو دریافت کرو کہ دوسری ذرہ کی سرعت ابتدائے  
حذف کیا تھی جواب  $۲۵$  طول مینار

(۲۲) کوئی بچہ گرتا ہوا جسم گر نیکی اخیر سیکنڈ میں کل گر نیکی اونچائی  
۱/۲ حصہ گرا تو اس کی کل گرنے کا ارتفاع اور کل وقت گر نیچا معلوم کرو  
جواب وقت گراؤ =  $n^2$  مان (ن-۱)

(۲۳) کوئی بچہ گرتا ہوا جسم اپنے گرنے کے اخیر سیکنڈ میں اپنی کل گر نیکی  
اونچائی کا ۱/۲ حصہ گرا تو اس کی کل گرنے کی اونچائی اور کل وقت گر نیچا  
معلوم کرو جواب اونچائی =  $۵۰$  فٹ اور وقت = تقریباً  $۱$  سیکنڈ

(۲۴) کوئی جسم سرعت  $۵$  فٹ فی سیکنڈ کے ساتھ نیچے محذوف ہوا۔  
۱۰ سیکنڈ کے بعد ایک اور جسم اول جسم کے  $۸$  گنا سرعت کی ساتھ اوپر کھینچا  
محذوف ہوا تو معلوم کرو کہ کتنی دیر میں دو نو ملینگے

جواب ۸۰ سیکنڈ

(۲۵) کوئی جسم کسی مفروضہ بندی سے نیچے گرا۔ ۳ سیکنڈ کے بعد

ایک اور جسم اول کو مقام گراو کے ۶۰۰ فٹ نیچے سے گرا۔ تو معلوم کرو کہ دونوں کتنی دیر میں اور کس مقام پر ٹھہریگی

جواب (۱) ۶۱ فٹ (۲) ۷۷۰ سیکنڈ

(۲۶) کوئی پتھر ایک کنوین مین گرا سس سیکنڈ کے بعد اوسکو پانی پر پہنچنے کے آواز آئی آواز کے آنے کے سرعت یکساں ۱۰۹۰ فٹ فی سیکنڈ ہے یعنی = ۳۴ ق تو دریافت کرو کہ پانی کے سطح کنوین کے دماغی سے کتنی نیچے ہے جواب اگر ن تعداد فٹ مطلوبہ ہو

تو ن + ۳۴ = ۲۱ ق ن = ۳۴ ق س

(۲۷) جب کوئی ذرہ مفروضہ ارتفاع سے ن فٹ گر چکا تو اوس لحظہ میں ایک اور ذرہ اوسکی اونچائی سے نیچے محذوف ہوا اور سس سیکنڈ کے انجام میں اول ذرہ کی ساتھ آ ملا تو دریافت کرو کہ دوسرا ذرہ کتنی سرعت کے ساتھ محذوف ہوا جواب  $\frac{N}{S} + ۲۱ ق ن$

۲۸۔ کوئی ذرہ ۴۰۰ فٹ کی اونچائی سے گرا اور جب وہ ۵۰ فٹ نیچے گر چکا تو ایک اور ذرہ ایسی سرعت سے محذوف ہوا کہ دونوں سطح زمین پر ایک ہی لحظہ میں پہنچے تو دریافت کرو کہ دوسری ذرہ کی رفتار کے سرعت کیا ہے جواب ۷۲

۲۹ کوئی ذرہ کسی قدر سرعت سے اوپر کی طرف محذوف ہوا اور دیکھا گیا کہ ذرہ کو ایک مقام پر چکی ٹہری ۱ فٹ ہے گذر جانی اور وہیں وہ اپنے آنے میں سس سیکنڈ لگے تو ذرہ کے ٹہرنے کے سرعت دریافت

جواب اگر گ برابر سرعت مطلوبہ کے ہو تو

کرو

$$گ = \frac{س \times ق}{س + ق} = ۱$$

(۲۶) کسی ذرہ کی سرعت ۲ فٹ فاصلہ طے کرنے میں ۱۶ انچ فی سیکنڈ سے ۲۰ فٹ فی سیکنڈ ہو گئے تو اس کا اسراع اور کل وقت حرکت دریا

کرو

جواب (۱) ۱ (۲) ۲۰  
(۳۱) کسی ذرہ کی سرعت ۹ فٹ فاصلہ طے کرنے میں ۱۶ انچ فی سیکنڈ ہو گئی تو اس کا اسراع اور کل فاصلہ طے شدہ معلوم کرو۔

$$جواب (۱) \frac{۱}{۲} (۲) ۲۵$$

(۳۲) کسی ذرہ کا اسراع اتنا ہے کہ ۱۶ سیکنڈ تک حرکت کرنے میں اس کی سرعت محصلہ اتنی جاتی ہے کہ اس کی ساتھ یکساں طور پر چکر ۱۶ سیکنڈ میں ۲۰ فٹ فاصلہ طے کر سکتا ہے تو ذرہ کا اسراع کیا تھا

جواب ۳۲

(۳۳) دیکھا گیا کہ کسی ذرہ نے دو متواتر سیکنڈ میں جدا گانہ ۸۰ فٹ و ۱۱۲ فٹ فاصلہ طے کیا تو اس کا اسراع اور کل وقت حرکت دریافت کرو

$$جواب (۱) ۳۲ (۲) ۴$$

(۳۴) کوئی جسم ایسی سرعت کی ساتھ اوپر کی طرف محذوف ہو کہ جس سے وہ ۲۰ ق اونچائی تک بلند ہو سکتا ہے تو دریافت کرو کہ کتنی وقت کے بعد اس جسم کی نیچی گرنے کے سرعت برابر ق کے ہو گئے

$$جواب ۳ سیکنڈ$$

کسی ذرہ کی سرعت

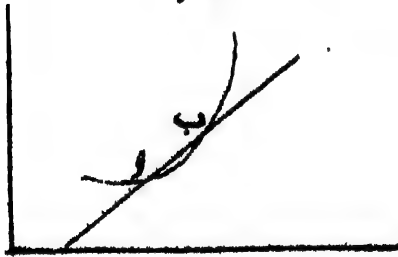
۳۵ کوئی ذرہ یکسان اسراع ع کے ساتھ حرکت کرتا ہے اور دیکھا گیا کہ کوئی مفروضہ فاصلہ طے کرنے میں اسکی سرعت بقدر گ بڑھی اور اس فاصلہ کی ابتدائی اور انجام کئے سرعتوں کا اوسط برابر م کے ہے تو ثابت کرو کہ گ م ح ع ف

۳۶ کوئی ذرہ سرعت گ کے ساتھ اوپر کی طرف پہنچا گیا۔ اوپر چڑھتا اور نیچے اترنے میں ہوا کی ٹکڑیاں ہمیشہ کشش زمین کی مقدار کے نصف کو برابر ہے جب ذرہ اس مقام پر جہاں سے اوپر پہنچا گیا تھا واپس آیا تو اسکی سرعت کی مقدار گ رہتی تو ثابت کرو کہ گ = گ ب ح ا ت م۔

## باب چھارم

حرکت مرکب اور انفصال حرکت کے بیان میں

(۳۸) اول ہر سہ باب میں ذرہ کی حرکت صرف خط مستقیم میں تصور کی گئی ہے۔ اب ذرہ کی حرکت کسی خط منحنی میں اور اسکا مقدار اور اوکی اور چند خواص بیان کی جائیگی۔ جب کوئی ذرہ کسی خط منحنی میں حرکت کرتا ہو تو اسکی سرعت کے سمت ہر لحظہ بدلتی رہتی ہے مگر کسی خاص نقطہ پر سرعت کی سمت اس نقطہ پر کے حماس کے سمت میں ہوتی ہے

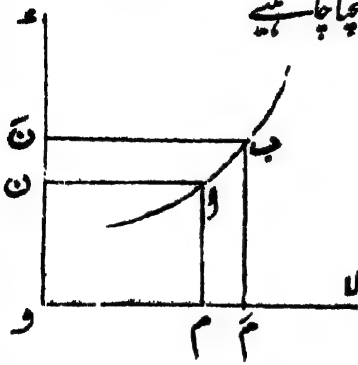


مثلاً فرض کرو کہ کسی خاص لحظہ میں ذرہ نقطہ ۱ پر ہے اور نقطہ ب ذرہ کی سمت حرکت میں نقطہ ۱ سے بہت سے قریب

واقع ہے۔ تو ظاہر ہے کہ لحظہ مفروضہ میں ذرہ نقطہ ۱ سے نقطہ ب کے طرف چل رہا ہے۔ مگر چونکہ ۱ اور ب ایک دوسرے سے بہت قریب واقع ہیں پس حصہ دایرہ ۱ ب اور خط ۱ ب میں بہت ہی کم اختلاف ہے یعنی خط ۱ ب نقطہ ۱ پر کے حماس کے سمت میں ہے چونکہ ۱ اس حماس کے سمت ہمیشہ بدلتی جاتی ہے تو ہم ذرہ کے سمت سرعت کی تبدیلی میں کی سمت کی تبدیلی دریافت کر سکیں گی



سرعت اور اسراع کے ناپنے اور خط استقیم سے تعبیر کرینچا طریقہ ہم پیشتر بیان کر چکے ہیں۔ کسی خط منحنی میں یہی سرعت اور اسراع کے ناپنی اور تعبیر کرینچا طریقہ وہی ہے صرف اس صورت میں تعبیر کرینچا لاخط اوس مقام کے محاسن یا محاسن کی متوازی سمت میں کہنا چاہیے



۴۹۔ فرض کرو کہ کوئی ذرہ کسی لحظہ میں کسی خط منحنی میں کسی قسم کے حرکت سے ۱ سے ب کی سمت میں متحرک ہے خط منحنی کی سطح میں کوئی دو محور دلا اور د

ایک دوسری سے کوئی خاص زاویہ بناتے ہوئے فرض کرو اور نقاط ۱ اور ۲ سے خطوط ۱ م اور ب م و ان اور ان متوازی محوروں مفروضہ کہ کہنچہ۔ ریاضی میں م اور ن کو نقطہ ۱ کے متین و محد کہتی ہیں۔

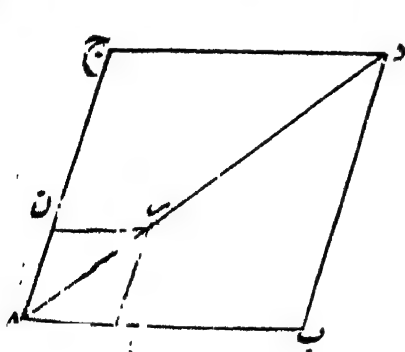
نقطہ م کو پایہ میں اور ن کو پایہ محد کہنا جاتا ہے۔

مثلاً بالاسے ظاہر ہے کہ حتمی وقت میں ذرہ نقطہ ۱ سے نقطہ ب تک پہنچتا ہے اور وقت میں نقطہ م محور دلا کے سمت میں نقطہ م تک پہنچتا ہے اور نقطہ م محور دلا کے سمت میں نقطہ ن تک پہنچتا ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ہم دو دون محوروں پر جبہ لگائیں م اور ن کے حرکت کو تصور کریں تو

خط منحنی میں ذرہ کے حرکت کا پورا پورا قیاس کیا جاسکتا ہے خط منحنی میں کسی جسم کے حرکت کو مکمل طور پر سمجھنے کے لئے اوس حرکت کو ذرہ کے

محورون مفروضہ کی سمت میں یچین اور متحدہ کے پاؤن کی حرکتوں میں  
اس طرح انفصال کرنا بہت مفید ہے اور علم حرکت کا ایک جزو اولے  
ہے۔ اس طریقہ کا مفصل حال بیان مندرجہ ذیل سے معلوم ہو جائیگا

(۴۰)۔ اگر کوئی ذرہ کسی نقطہ میں دو مختلف یکساں سرعتوں سے دو مختلف  
سمتوں میں حرکت کر نیکیو مائل ہو اور اگر کسی نقطہ سے دو خطوط مستقیم ان  
سرعتوں کو جداگانہ سمت اور مقدار میں تعبیر کریں اور اگر اندو خطوط کو  
اضلاع مانکر ایک متوازی الاضلاع بنائی جاوے تو ذرہ کی سرعت واقعی  
بھی یکساں ہوگی جسکی سمت اور مقدار متوازی الاضلاع کے اُس قطر سے تعبیر ہوگی جو نقطہ  
مفروضہ سے گزرتا ہے دعوے مذکورہ بالا کو متوازی الاضلاع سرعتات کہتی ہیں



فرض کرو کہ کوئی ذرہ جو نقطہ  
۱ پر مقیم ہے سرعت یکساں  
گول کے ساتھ ایک لفظ  
میں جداگانہ ا ب اور ا ج  
کی سمتوں میں حرکت کرنے کو  
مائل ہے

اور فرض کرو کہ خطوط ا ب اور ا ج جداگانہ سرعتوں گ اور گ کو مقدار  
اور سمت میں تعبیر کرتے ہیں۔ اضلاع ا ب اور ا ج پر ایک متوازی الاضلاع  
ا د بناو۔ سرعت گ کو خط ا ب سے تعبیر کرنے سے یہ مراد ہے کہ  
ذرہ نقطہ ۱ سے یکساں سرعت کے ساتھ چلکر اکائی وقت کے انجام

یہ نقطہ پر پہنچتا ہے۔ یعنی اگر ذرہ کی سرعت صرف گ ہو تو  
 اکائی وقت کے انجام میں وہ خط ادب کی کئی تمام پر پہنچتا کیونکہ ادب سے  
 ان کے ہے۔ اس طرح اگر ذرہ کی سرعت یکساں صرف گ ہو تو وہ  
 وقت کے انجام میں خط ج د میں کسی تمام پر پہنچتا مگر چونکہ سرعت ہی گ و گ  
 ایک ہی لخط میں موجود ہیں۔ اس لئے اکائی وقت کے انجام میں ذرہ نقطہ  
 پہنچتا کیونکہ نقطہ خطوط ب و د اور ج و کا قاطع ہے۔

فرض کرو کہ اکائی وقت کسی حصہ ص کے انجام میں ذرہ نقطہ ۱ پر واقع ہو  
 خطوط اب اور ا ج نفاط م و ن ایسی فرض کرو کہ

$$\frac{1}{\text{اب}} = \frac{1}{\text{ا ج}} = \frac{1}{\text{ص}} - \text{اس سے ظاہر ہے کہ}$$

اگر ذرہ سرعت گ سے حرکت کرتا تو ص وقت میں فاصلہ ام طے کرتا  
 اور اگر صرف گ سرعت سے چلتا تو ص وقت میں فاصلہ ان طے کرتا

اضلاع ام اور ان پرتوازی الاضلاع ۱ ربناد۔ اب چونکہ ایک ہی لخط  
 میں سرعتیں گ اور گ موجود ہیں پس ص وقت کے انجام میں ذرہ نقطہ۔ پر

پہنچتا۔ لیکن چونکہ  $\frac{1}{\text{اب}} = \frac{1}{\text{ا ج}} = \frac{1}{\text{ص}}$  اسلئے قطر ۱ راور ۱ و ایک ہی

سیدہ میں ہوں گے (م ۶ شکل)۔ اس سے یہ ثابت ہوا کہ ذرہ  
 اکائی وقت کے ہر لخط میں قطر ۱ کے خط میں حرکت کرتا ہے

اور نیز مثلث ام ناور ۱ ب د ایک دوسری کی متا یہ ہیں اسلئے

$$\frac{1}{\text{د ۱}} = \frac{1}{\text{ب ۱}} = \frac{1}{\text{ص}}$$

اور ص اس سے یہ ثابت ہوا کہ ذرہ کی سرعت صمت

مین یکیان ہے (دیکھو حد ۱۱)

پہلے ثابت ہوا کہ ذرہ کی واقعی سرعت خط ۱ د کے سمت مین یکیان ہے اور مقدار مین متوازی الاضلاع کے قطر ۱ د سے تعبیر ہوتی ہے

(۱۴) ثبوت مذکورہ بالا سرعت غیر یکیان کے حالت مین ہی کافی ہے کیونکہ کسی خاص لمحہ مین سرعت غیر یکیان کے مقدار اوس لمحہ سے ایک اکائی وقت کے عرصہ تک یکیان مان لی جاتی ہے (جیسی

۱۳ مین بیان ہوا) پس اگر کسی خاص لمحہ مین ذرہ کی غیر یکیان سرعت ۱ گ اور گ ہوں اور جب دہاگانہ خطوط ۱ ب اور ۱ ج سے تعبیر ہوں تو متوازی الاضلاع ۱ ب د ج کا قطر او ذرہ کی اوس خاص لمحہ مین د سرعت کو تعبیر کریگا۔ مگر واضح ہو کہ اوس خاص لمحہ کے بعد ذرہ کی سرعتوں کا مقدار مختلف ہو جائیگا۔ یعنی اوسکی واقعی سرعت کا مقدار اور سمت ہر لمحہ مین مختلف ہوتا جاتا ہے اور اوسکی تعبیر کرنے کے لئے ہم نئی متوازی الاضلاع بنائے گئے ہیں

(۱۵) اس طرح اگر خطوط ۱ ب اور ۱ ج کسی لمحہ مین ذرہ کی اسرعات یکیان کو تعبیر کریں تو متوازی الاضلاع ۱ ب د ج کا قطر ۱ د اوس لمحہ مین ذرہ کی واقعی اسراع کو تعبیر کریگا اس معنی کو متوازی الاضلاع ۱ ب د ج کے ساتھ ہے۔ اسکا ثبوت حد ۱۵ کے طرح ہے

کیونکہ دفعہ ۱۴ مین ہم دیکھا چکی ہیں کہ اسراع ہی سرعت کی طرح ماپا جاتا ہے یعنی اگر خطوط ۱ ب اور ۱ ج کو ذرہ کی سرعت کا تعبیر کنندہ فرض کریں



(r).....  $\frac{g}{\text{جیدہ گ}}$  =  $\frac{g}{\text{جیدہ گ}}$  =  $\frac{g}{\text{جیدہ گ}}$

(۴۴)۔ اگر سرعات جزوی ایک دوسری سے زاویہ قائمہ بنا دیں تو

$${}^2_2\text{K} + {}^2_1\text{H} = {}^3_1\text{H} \quad q_0 = 0$$

فرض کرو دو گول اور گ کے درمیان کا زاویہ برابر ہے کے ہے تو

ک = گجم ۲

گپ = گ جب ۴

اور  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(۶ م)۔ اگر کسی ذرہ کی اسراعات جزو منفصلہ و مع ہوں اور

اسراع واقعی ہو تو عروج و عکس نسبتیں حد ہر کے مشابہ ہو گئی

یعنی  $\bar{c} + \bar{c}' + \bar{c}'' + \bar{c}''' = 0$  و غیرہ وغیرہ

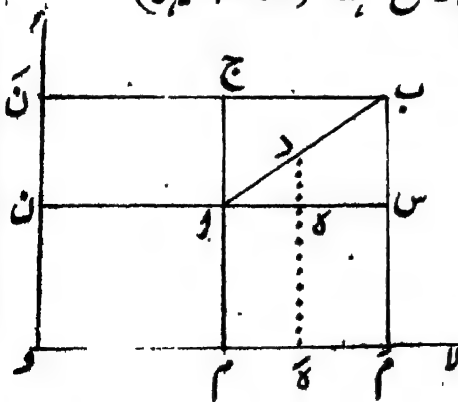
(۴۷) دفعات ۴۱-۴۳ سے معلوم ہوتا ہے کہ جیب کوی وزن

ایک ہی لحظہ میں دوسرے متون کیسے یا دوسرا متون کیسے  
 دو مختلف سمتوں میں حرکت کرنی پر مایل ہے تو ان سرعہ متون یا اسرار

مشکل اسے ایک حاصل سرعت یا حاصل اسراع پیدا ہوتا ہے  
چنانچہ جب کوئی ذرہ کسی سرعت یا اسراع سے حرکت کرتا ہے تو ہم

اوس سرعت یا اسراع کو اس طرح خیال کر سکتی ہیں کہ وہ دو سرعت  
جزوی یا دو اسرعات جزوی کا حاصل ہے جو کہ دو متین سمتوں میں واقع  
ہیں ان دو سرعت جزوی اسرعات جزوی کے درمیان کے زاویہ کو  
جتنا چاہیں خیال کر سکتی ہیں۔ لیکن اس زاویہ کو زاویہ قائمہ یعنی ۹۰ درجہ  
زاویہ فرض کرنے سے مطلب کے سمجھنے کے لئے بہت آسانی ہو جاتی ہے۔

اسلو سرعت یا اسراع کو دو محور علی القوایم میں منفصل کرتے ہیں  
واضح ہو کہ جس جگہ سرعت یا اسراع کے منفصل کا لفظ مستقل ہو گا  
(اگر برعکس اوسکی بیان نہ کیا جاوے) تو اوس سے یہ مراد ہوگی کہ  
منفصل سرعت یا اسراع ایسے دو محوروں میں ہوئے ہو جنکا زاویہ در  
میان قائمہ ہے۔ پس سرعت گ کے دو اجزای منفصلہ جدا گانہ گ جم ۲ اور  
گ جب ۲ ہر جہان ۲ وہ زاویہ ہے جو سرعت گ کے سمت اور پہلی سرعت  
جزوی کے سمت کے مابین واقع ہے۔ (حدہ ۴ دیکھو)



(۴۸) اگر کسی ذرہ

کے سرعت کسی لمحہ

میں یکساں ہو تو اوپر

سرعت کے اجزای

منفصلہ دو متین محور

متوازی سمتوں میں

یکساں ہونگے۔ فرض کرو کہ خط ۱ ب سرعت کے مقدار اور سمت کو تعبیر





فرض کرو کہ خط ۱ جو کہ نقطہ معین و سے پہنچا گیا ہے ذرہ کی مقام  
 اول پر کے سرعت کو مقدار اور سمت میں تعبیر کرتا ہے اور اس طرح  
 خط ۱ و اسکی دوسری مقام پر کے سرعت کو مقدار اور سمت میں تعبیر  
 کرتا ہے۔ ان سرعت ۱ و اور ۱ و کو دو معین محور میں منفصل کرو  
 یعنی ۱ و اور ۱ و کے حسب ذہین۔ اور ۱ و اور ۱ و کی  
 جزوین اس سے ظاہر ہے کہ ذرہ کی اول مقام سے دوسری مقام  
 پر جانی میں سرعت جزو منفصلہ ۱ و کے تبدیلی خط ۱ و سے تعبیر ہوتی  
 ہے۔ اور اس طرح سرعت جزو منفصلہ ۱ و کے تبدیلی خط ۱ و سے  
 تعبیر ہوتی ہے یعنی اس اور ا ب ج کو کہ جب ا گاہ ۱ و اور ۱ و کے  
 برابر ہیں ان تبدیلیوں کو تعبیر کرتی ہیں اسلیٰ متوازی الاضلاع س ج کا  
 وتر ۱ و سرعت کے واقعی تبدیلی کو مقدار اور سمت میں تعبیر کرتا ہے  
 اسلیٰ اگر ہکو معلوم کرنا ہو کہ ایک مقام سے دوسری مقام پر جانی میں  
 ذرہ کی سرعت میں کیا تبدیلی ہوئی تو اسکی لئے قاعدہ یہ ہے کہ سطح پر  
 کسی نقطہ سے دو خط کہنچی جا دیں جنہیں سے ایک ذرہ کے اول مقام کے  
 سرعت کو مقدار اور سمت میں تعبیر کرے اور دوسرا خط ذرہ کے دوسرے  
 مقام کے سرعت کو۔ اور ان دو خطوں کی حسیہ کے سرو کو ملانی سے  
 جو خط پیدا ہو گا وہ ذرہ کے سرعت کے واقعی تبدیلی کو مقدار اور  
 سمت میں تعبیر کریگا  
 واضح ہو کہ اگر ذرہ خط مستقیم میں حرکت کرے تو اسکی ایک مقام سے

دوسری مقام پر جانے سے سمت میں کسی طرح کے تبدیلی نہیں ہوتی۔  
 پس ایسی حالت میں نقطہ اور ب (مثل دکنوزین) ایک ہی خط مستقیم میں  
 ہو گئی اور بعض صورتوں میں یہہ ہے ممکن ہے کہ سرعت تغییر شدہ بہ  
 ۱۱ اور وہ ب کے مقدار اور سمت ایسی ہو کہ سرعت ۱ کے ولا محو  
 پر جزو منقذہ کے تبدیلی منافی ہو یعنی عکس سمت میں ہو یا یہہ کہو  
 کہ و م سے بڑا ہو لیکن مختلف حالتوں میں علیحدہ مثلین بنا کر دیکھیں  
 سے معلوم ہو گا کہ تبدیلی کے مقدار اور سمت معلوم کر سیکر لئے جو  
 قاعدہ مبنی او پر بیان کیا ہے وہ ہر ایک حالت پر درست آؤ گا  
 (۵۰) مبنی حد ۱۹ اور ۲۰ میں جو مبنی اسراع کی بیان کئی ہیں وہ  
 فقط اسی حالت میں درست ہیں جبکہ ذرہ خط مستقیم میں حرکت کرے  
 مگر جبکہ ذرہ کے حرکت خط منحنی میں ہوگی تو وہاں اسراع کے مبنی  
 اور طرح پر لئے جاتی ہیں

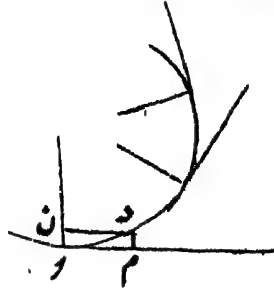
دفعہ ۹ میں بیان کیا گیا ہے کہ ذرہ کی ایک مقام سے دوسری مقام  
 پر جانی میں سرعت کے تبدیلی کے مقدار اور سمت کس طرح دریافت ہوتی  
 ہے۔ طالب العلم کو معلوم ہو گا کہ اس تبدیلی کے پیدا ہونے کے  
 دو باعث ہو سکتی ہیں۔ یعنی (اول) ذرہ کی سرعت کے مقدار کو تبدیلی  
 اور (دوم) او کی سمت کے تبدیلی۔ جس حالت میں کہ ذرہ کی حرکت خط  
 مستقیم میں ہو تو وہاں سرعت کے سمت ہمیشہ یکسان رہتی ہے اس لیے فقط  
 مقدار ہی کے تبدیلی کو کل تبدیلی سمجھنے چاہیے۔ اور اس طرح جبکہ ذرہ یکان

سے کسی خط منحنی میں حرکت کرے تو وہاں سرعت کی مقدار کی تبدیلی کچھ نہ ہوگی اور فقط سمت ہی کے تبدیلی سے کل تبدیلی پیدا ہوتی ہے۔ لیکن جبکہ ذرہ غیر یکساں سرعت سے خط منحنی میں حرکت کرے تو وہاں مقدار اور سمت دونوں کی تبدیلی کل تبدیلی کے باعث ہیں لہذا اسراع کے تعریف عام طور پر اس طرح ہے۔ ذرہ کی سرعت کے اکائی وقت میں کل تبدیلی کو (خواہ ایک باعث سے ہو یا دو نوے جیسا کہ اوپر بیان کیا گیا)۔ اسراع کھا جاتا ہے واضح ہو کہ جو تعریف اسراع کی بیان کی گئی ہے اس تعریف سے جو کہ حد ۲۹ میں بیان ہوئی ہے برخلاف نہیں ہے۔ سرعت کی مقدار اور سمت کے تبدیلیوں سے جو کل تبدیلی حاصل ہوتی ہے اس کو اسراع کہتے ہیں اسلی جھانچو سرعت کے سمت میں کچھ تبدیلی نہیں ہے وہاں اکائی وقت میں سرعت کی مقدار ہی کے تبدیلی کو اسراع کہنا درست ہے

(۵۱)۔ بیان مذکورہ بالا سے ظاہر ہے کہ ذرہ کی راہ جو کہ:۔ میں کسی مقام اور سکنا واقعی اسراع دو اسراعات جزوی کا حاصل ہے یعنی اول وہ اسراع ہے جو کہ اوس مقام پر سرعت کی مقدار کے زیادتی ہے اور جبکی سمت اوس مقام میں ہے جو راہ حرکت میں اوس مقام سے پہنچا گیا ہے اور دوم وہ اسراع ہے جو کہ سرعت کے تبدیلی سمت سے پیدا ہوتا ہے اور جبکی سمت ماس مذکورہ بالا کے عمود میں ہے۔ جبکہ ذرہ یکساں سرعت سے خط منحنی میں حرکت کرے تو وہاں سرعت کی مقدار میں کچھ تبدیلی نہ ہوتی اور فقط سمت میں تبدیلی ہونے سے اسراع خط ماس کے عمود کے

سمت میں ہوتا ہے

شکل مندرجہ ذیل سے اور محیط معلوم ہو جاوے گا کہ ذرہ کے حرکت خط  
منحنی میں ان دو قسموں کے اسراعوں کے ساتھ کس طرح ہوتی ہے



اس شکل میں ہر لحظہ میں ذرہ کے دو سرعت موجود ہیں۔ اگر اسکی سرعت فقط  
خط مماس میں ہوتی تو وہ خط مستقیم پر حرکت کرتا رہتا۔ لیکن جب وہ خط  
مماس میں حرکت کرنے کو مایل ہوتا ہے تو اسوقت میں ایک اور دوسری  
سرعت کے ساتھ خط عمود مماس پر بھی حرکت کرنے کو مایل ہوتا ہے  
۔ اور نتیجہ ان دونوں میلان کا یہ ہوتا ہے کہ متوازی الاضلاع حرکت  
کے قاعدہ سے ذرہ ان دو قسموں کے بیچ میں کسی خاص سمت حرکت  
کرتا ہے اور ہر لحظہ ایسی صورت ہونے کے سبب سے اسکا راہ حرکت  
ایک خط منحنی میں ہو جاتا ہے

## سوالات باب چھارم

(۱) کوئی ملاح دریا کے ایک کنارہ پر کے کسی خاص مقام سے دوسری  
کنارہ پر اس مقام کے صین متقابل میں جانا چاہتا ہے۔ اور دریا کے بہاؤ کے

دو چیز سرعت سے اوسنی کشتی چلائے تو مبتلاؤ کہ ناؤ کو کس سمت میں  
چلاوے جو اوس مقام پر جھانکے جانا چاہتا ہے پہونچ جاوے  
(جواب) ندی کے بہاؤ کے سمت سے پہونچ جائے

(۲) کوئی شخص چاہتا ہے کہ دریا سے سیدنا میر کر اترے اسکو راسی دریا کے

۱۔ تہی جبکہ وہ دوسری کنارہ پر پہونچا تو اوسنی معلوم کیا کہ جس جگہ وہ

اترنا چاہتا تھا اوس سے ب فاصلہ پر دریا کے نیچی آن پڑا ہے۔ تو ثابت

کر دے کہ اگر وہ اوسنی خط میں جہین گیا تھا آنا چاہیے تو اوسکو چاہی کہ دریا

ایک ۵ ناویہ بنا کر چلی تاکہ مس  $(۴۵ - \frac{9}{4}) = \frac{3}{4}$

(۳) دو ذرے اپنے علیحدہ علیحدہ سرعت یکساں سے ایک ہی سطح پر

دو خطوط مستقیم میں چل رہے ہیں اگر دونوں ذرون کو ایک خط مستقیم سے

مٹایا جاوے اور اوس خط میں ایک ایسا نقطہ لیا جاوے جو اوسکو

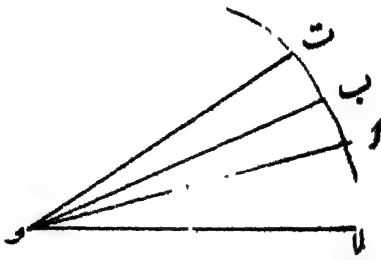
متناسب حصوں میں تقسیم کرے تو وہ نقطہ ہی ایک خط مستقیم میں

حرکت کرے گا

## باب پنجم

سرعت الزاویہ اور اسراع الزاویہ کے سامین

(۵۲) فرض کرو کہ کوئی ذرہ ۱ کسی خط مستقیم یا خط منحنی ب ت میں حرکت کر رہا ہے۔ کسی نقطہ سے ولا ایک خط کھینچا گیا ہے



جب کہ ذرہ ۱ ب ت

پر حرکت کر رہا ہے

تو نقطہ سے اوکی

سمت متواتر وقتوں

میں ۱- و ب- ت

وغیرہ ہے

اس سے ظاہر ہے کہ زاویہ لا ۱ ہر لمحہ بدلتا جاویگا۔ کسی خاص اکاشی

وقت میں اس زاویہ کی مقدار تبدیلی کو لمبا ط نقطہ و کے ذرہ کے سرعت

زاویہ کہیں گے۔ واضح ہو کہ اس قسم کے سرعت کے مپنے کے لئے ذرہ کا

فاصلہ نقطہ و سے معلوم کرنا ضرور ہین اگر دو ذروں کے فاصلہ نقطہ و

مختلف ہوں تو یہی اونکے سرعت زاویہ کو برابر کہا جائیگا بشرطیکہ لمبا

نقطہ و کے اونکے سمت کے تبدیلی کے مقدار برابر ہو

(۵۳) سرعت الزاویہ یکساں یا غیر یکساں ہو سکتی ہے

جبکہ برابر وقت میں یا اوس وقت کے برابر حصوں میں زاویہ لاوا کی  
 مقدار تبدیلی برابر ہو تو سرعت الزاویہ یکساں ہوگی اور اگر اسکی برعکس ہو  
 تو غیر یکساں

غیر یکساں سرعت الزاویہ بھی دو قسم ہوتی ہے جبکہ سرعت الزاویہ کی تبدیلی  
 برابر وقت میں برابر ہو تو اس تبدیلی کو یکساں اسراع الزاویہ کہیں گی اور  
 جب ایسا نہ ہو تو غیر یکساں اسراع الزاویہ

(۴۲) سرعت الزاویہ یا اسراع الزاویہ کے مانپنے کا طریقہ مابینہ ذیل  
 ہی جیسا کہ سرعت یا اسراع کے لئے طریقہ بھی بیان کر چکی ہیں۔ یعنی  
 جبکہ سرعت الزاویہ یکساں ہو تو اکائی وقت میں زاویہ لاوا کی تبدیلی میں  
 اکائی زاویہ کے جقدر مقدار ہوگی وہی مقدار سرعت الزاویہ کو تعبیر کر گئی  
 سلام کہتی ہیں کہ کسی ذرہ کی سرعت الزاویہ فی منٹ ۱۰ درجہ ہے تو ہمارے  
 مراد مولیٰ لہ ایک منٹ میں ایک درجہ تبدیلی کو ہم نے سرعت الزاویہ کے  
 اکائی فرض کیا تو اس حساب سے زاویہ لاوا کے تبدیلی سرعت الزاویہ کے  
 اکائی کا دس گنا ہے جبکہ سرعت الزاویہ یکساں ہو تو کسی نقطہ میں  
 اسکی مانپنے کے لئے اوس نقطہ سے لیکر اکائی وقت تک سرعت الزاویہ  
 کو یکساں فرض کرنا چاہیے۔ یہ طریقہ دیا ہی ہے جیسا کہ ہم سرعت غیر  
 یکساں کے مانپنے کے لئے بیان کر چکی ہیں

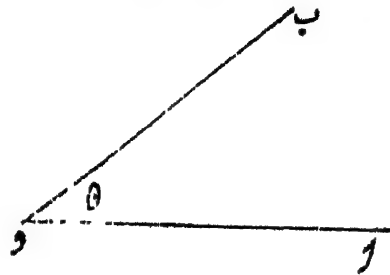
اسطرح سے اسراع الزاویہ جبکہ یکساں ہو تو اکائی وقت میں سرعت  
 الزاویہ کے تبدیلی کے مقدار جقدر ہوتی ہے اس سے اسراع

تبدیلیت اکائی وقت میں ہی اور ایک درجہ اکائی زاویہ ہے اور زاویہ لاوا کی

اگر زاویہ مابین پانچا و گیا۔ اور جبکہ غیر یکساں ہو تو کسی خط میں او کی پانچا کے  
 لئے اس خط سے لیکر اکائی وقت تک سرعت الزاویہ کے تبدیلیا  
 کو یکساں فرض کر لینا چاہیئے۔ اور ایسا فرض کر۔ فیین اس اکائی  
 وقت میں سرعت الزاویہ کے تبدیلی کے ہر مقدار جو وہی اور خط میں درج  
 و تعبیر کریں گی۔ واضح ہو کہ تبدیلی سے مراد زیادتی یا کمائی کے دونوں ہیں  
 (۵۵) فرض کرو کہ وائے سرعت الزاویہ یکساں ہے اور مقدار میں ط

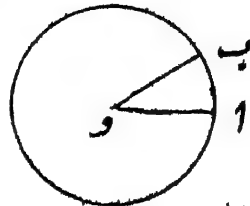
سے تعبیر ہے

تو چارے مراد  
 یہ ہے کہ اکائی  
 وقت میں خط و  
 ط زاویہ بناتا ہے



اس حساب سے و وقت میں خط ط میں زاویہ بنا دینگا۔ اسکو  
 اگر یہ زاویہ  $\theta$  سے تعبیر کیا جاوے تو  $\theta = \text{و} \times \text{ط}$   
 (۵۶) کوئی دزہ کسی دایرہ پر سرعت یکساں گ سے چل رہا ہے  
 لمبا ط اس دایرہ کے مرکز و کے سرعت الزاویہ معلوم کرو

فرض کرو کہ دایرہ کا نصف قطر  
 و ہے اور دزہ کی سرعت فی  
 گول ناپ میں مقدار ط ہے



اور فرض کرو کہ شروع سے اکائی وقت کی انجام میں دزہ ب پہنچ



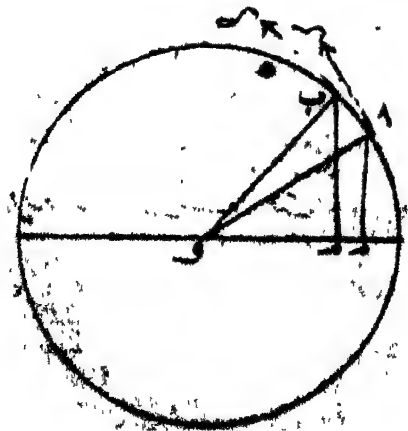
گیا۔ اب چونکہ وزہ کی سرعت دایرہ پر یکساں ہے۔ اسلواں پہلے  
لیکن اسی وقت میں وزہ ۱ میل بناو کے : اوپر ۱۰۰ ب بنا تا ہے  
۱۰۰ ب = ط - گریٹ =  $\frac{۱۰۰}{۲۰}$  = ۵۔ ۱۰۰ ب = ۵۰۰۔ ۱۰۰ ب = ۵۰۰

(۵۷) وزہ کا محیط دایرہ پر کسی خاص مقام سے چپکے اور تمام اس وقت  
چکر لگانے کے بعد اسی مقام پر لوٹ آنے میں جو وقت صرف ہوتا ہو  
اوسکو دایرہ کا وقت گردش کہتی ہیں اوسوقت میں خط و اس کے سمت  
۲۰ یعنی ۳۶۰ درجہ گزوم آتی ہے اگر ک اوسکی وقت گردش کو تعبیر کریں

$$\text{توک} = \frac{۳۶۰}{۲۰} = ۱۸$$

$$\text{اور ط} = \frac{۳۶۰}{۲۰}$$

۱۸ گوی وزہ دایرہ میں سرعت یکساں گ سے چل رہا ہے۔ کسی خاص  
نقطہ میں اوسکی اسراع کے سمت اور مقدار معلوم کرو



فرض کرو کہ نقطہ و دائرہ کا مرکز ہے اور ولا اور وء و د محور  
 علی القوائیم ہیں۔

چونکہ دائرہ پر دزہ کی سرعت یکساں ہے اسلئے لمجاظ نقطہ و کے اوسکی  
 سرعت الزاویہ یکساں ہے اور فرض کرو کہ وہ خط سے تعبیر ہوتی ہے  
 اور فرض کرو کہ دزہ ولا سے چپکڑ ص وقت کے جنیر میں نقطہ ۱ پر  
 پہونچا۔ اور اوسکی بعد ص وقت کے جنیر میں جو مقدار میں بہت کم ہی  
 نقطہ ۱ پر پہونچا۔ تو ظاہر ہے کہ جب دزہ نقطہ ۱ و ب پر ہے تو اوسکی  
 حرکت کی سمت جب اگانہ اون خطوط عماس میں ہے جو کہ اون نقطوں  
 سے دائرہ پر کھینچی گئی ہیں

فرض کرو کہ زاویہ ۱ ولا =  $\theta$  اور زاویہ ۱ ب =  $\theta$

تو  $\theta =$  طص - اور  $\theta =$  طص ..... (حد ۸۸)

بقا ط ا و ب پر سرعت گ کو محرو ن کے متوازی منقل کرو تو محور و کے  
 متوازی اجزا ر منفصلہ جدا گانہ = گ جب  $\theta$  اور گ جب  $\theta + \theta$   
 اور محور و کے متوازی اجزا ر منفصلہ جدا گانہ گ جم  $\theta$  اور گ جم  $\theta + \theta$   
 محور ولا کے متوازے اجزا ر سنے منفی ہیں کہ اونکی سمت  
 لا سے و کے طرف ہے۔

اسلئے ظاہر ہے کہ ولا محور کے متوازے سرعت کے تبدیلی  
 ص وقت میں

= - گ جب (۵ + ۵) + گ جب ۵ = - گ (جب ۵ عم ۵  
 + جم ۵ جب ۵ - جب ۵) = - گ ۵ جم ۵ = - گ ط ص جم ۵  
 (کیونکہ ۵ نہایت قلیل ہے اسلئے جب ۵ = ۵ اور جم ۵ = ۱)

اس مساوات سے عیاں ہے کہ دلا محور کے متوازی اسراع یعنی اکائی  
 وقت میں سرعت کی تبدیلی = - گ ط جم ۵ ..... (موجب ۲۰)  
 اسی طرح ص دقت میں دلا محور کے متوازی سرعت کی تبدیلی =  
 گ (جم ۵ × جم ۵ - جب ۵ × جب ۵ - جم ۵) = - گ ۵ جب ۵  
 = - گ ط ص جب ۵

∴ اسے محور کے متوازی اسراع = - گ ط جب ۵

∴ فرہ کے اسراع واقعی = (- گ ط جم ۵) + (- گ ط جب ۵) =  
 = گ ط

لیکن گ = ط ر ..... (حد ۵۵)

∴ اسراع واقعی = ر ط<sup>۲</sup> = گ<sup>۲</sup>

اور اگر دائرہ کے محیط پر زمرہ کا وقت گردش = ک ہو

تو اسراع واقعی =  $\frac{۲\pi}{ک} ر گ$

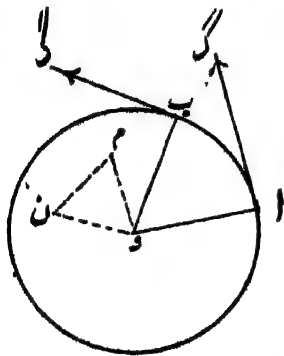
فرض کرو کہ اسراع واقعی کے سمت دلا محور کے ساتھ زاویہ  $\phi$  بناو تو مساوات مذکورہ

سے ظاہر ہے کہ مس  $\phi = \frac{گ ط جب ۵}{ر ط جم ۵} = ۵$  مس  $۵$  ..... (موجب ۲۰)

∴  $\phi = ۵$  یا  $۱۸۰ + ۵$

پس اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ذرہ کے اسراع کی سمت ہر لمحہ  
مین دائرہ کے مرکز کی طرف ہے۔ اور یہ بات ہم پہلے سے بھی  
معلوم کر سکتے تھے کیونکہ ذرہ کے سرعت دائرہ پر یکساں ہے  
اسلئے اسکے اسراع کی سمت ہر لمحہ مین عمودِ مماس کی سمت مین  
ہوگی جو کہ اس خاص صورت مین (یعنی دائرہ کے) مرکز کی طرف  
ہوتی ہے۔ . . . . . (دیکھو حصہ ۵)

یہ دعویٰ جو حصہ ۵ مین بیان کیا گیا ہے صورت ذیل سے بھی  
ثابت ہو سکتا ہے۔ دائرہ کے مرکز



و سے دو خط 'و م' و 'ن' ایسے

کسیچہ جو ذرہ کے آ اور ب مقام  
پر کی سرعتوں کو سمت اور مقدار

مین جداگانہ تعبیر کریں مگر چونکہ دائرہ  
پر ذرہ کی سرعت یکساں ہے اسلئے

و م = و ن اور ہو جب حد ۹۴ کے یہ معلوم ہے کہ خط م ن ذرہ کے  
مقام آ سے مقام ب پر جانی مین سرعت کی تبدیلی کو تعبیر کرتا ہے

اور اگر ذرہ کو اس فاصلہ چلنے مین جس وقت صرف ہوا ہو تو  
ا ب = گ ص اور ۵ = زاویہ ا و ب = ا ب = گ ص

مگر چونکہ زاویہ ا و ب = م د ن و م ن = ۲ دم جب ۷۰ و ن =  
۲ گ ص = ۵ گ ص = گ ص

۲۔ ذرہ کا اسراع یعنی اکائی وقت میں سرعت کی تبدیلی =  $\frac{g}{r}$   
 ظاہر ہے کہ اگر ص نہایت قلیل ہو یعنی مقام آ و ب بہت نزدیک ہوں  
 تو خط دم اور ون کے درمیان کا زاویہ نہایت قلیل ہوگا اور خط ن م  
 دم پر عمود ہوگا۔ لیکن و آ بھی دم پر عمود ہے اسلئے ثابت ہوا  
 کہ مقام آ پر ذرہ کے اسراع کی سمت او ہے یعنی مرکز کی طرف ہے  
 اگر رستی کے ایک سرے کو قائم کر کر اور دوسرے سرے میں ایک  
 گیند باندھ کر دائرہ پر یکساں سرعت سے چکر دیا جاوے یا کہ کسی کو ہلو  
 کا ہیل اسکے گرد یکساں سرعت سے حرکت کرے تو یہ حرکتیں اُسی حرکت  
 کی مثالیں ہیں جسکا ہم نے اوپر ذکر کیا ہے۔ ان صورتوں میں یہ ظاہر  
 ہے کہ ہیل ہر ایک لمحہ میں ایک خط مستقیم میں چلنے کی کوشش کرتا  
 ہے مگر ہر لمحہ میں اُس کڑی یا رستی جسکے ذریعہ سے وہ کو ہلو سے جدا  
 ہوا ہے اُسکو کو ہلو کی طرف کھینچتی ہے اور اُسکا نتیجہ یہ ہوتا ہے  
 کہ ہیل دائرہ میں حرکت کرتا ہے یہاں ہیل کا اسراع کی سمت دائرہ  
 کے مرکز کی طرف ہے۔ اگر ایسا نہ ہوتا تو ہیل سیدھا خط مستقیم  
 میں حرکت کرتا۔

(۵۹) فرض کرو کہ حد ۵۸ کی شکل میں نقطہ ۱ سے آم  
 دلا پر عمود کھینچا گیا ہے تو اُس حد میں ثابت کیا گیا ہے کہ نقطہ آم  
 کا اسراع محور دلا پر =  $g$ ۔ گ ط بم ۵ =  $\frac{g}{r}$  × و م یعنی نقطہ  
 م کا اسراع دائرہ کے مرکز کی طرف ہے

اور اس مرکز سے م کا جقدر فاصلہ ہے اُسکے متناسب ہے۔ اور یہ  
 ہی ظاہر ہے کہ جس عرصہ میں ذرہ آ نقطہ لا سے شروع ہو کر دائرہ  
 کا ایک پورا چکر گھا تا ہے اُسی عرصہ میں نقطہ م ہی نقطہ لا سے  
 شروع ہو کر اور تمام قطر لا پر حرکت کر کر پہنچا لیا اسی خط میں نقطہ  
 لا پر لوٹ آتا ہے۔ اس سے ثابت ہوا کہ جب کسی ذرہ کے اسراع  
 کے سمت ہر نقطہ میں کسی خاص نقطہ کی طرف ہوا اور اُسکی مقدار اُس  
 فاصلہ کے متناسب ہو جو ذرہ کا اس نقطہ سے ہی تو ذرہ اُس نقطہ خاص کی  
 دونوں جانب ایک خط میں اس طرح سے حرکت کرتا رہے گا کہ نقطہ خاص کی ہر طرف  
 طرف ذرہ کے فاصلات طویلہ برابر ہوں گے۔ اس طرح نقطہ کی ایک  
 جانب کی حد سے دوسری جانب کی حد تک جانے کو جنبش  
 کہتے ہیں اور اُس میں جو وقت صرف ہوتا ہے اسکو وقت جنبش  
 بولتے ہیں پس یہاں نقطہ م کا وقت جنبش برابر ہے اُس وقت  
 کے جو دائرہ پر ذرہ آ کے ۱۸۰ درجہ گھومنے میں صرف ہوتا ہے یعنی  
 =  $\frac{2\pi r}{v}$  (موجب حد)۔

## باب ششم

### سرعت متناسب

۶۰۔ بیان ہو چکا ہے کہ ذرہ کی تبدیلی مقام کے مقدار کو اُسکی  
 سرعت کہتے ہیں۔ مگر ذرہ کے مقام کی تبدیلی کا قیاس نہیں ہو سکتا

جب تک کہ وہ تبدیلی کسی اور مقام کے ساتھ ملحوظ نہ ہو مثلاً۔ فرض کرو کہ شخص کسی ریل پر سوار ہیں۔ جب ریل چلتی ہے تو ان دونوں کے حرکت ایک ہی ہے اگر دے صرف ایک دوسرے کی حرکت پر خیال کریں تو ان میں سے ہر ایک کو معلوم ہوگا کہ دوسرا شخص ساکن ہے کیونکہ انہی باہمی تبدیلی مقام کچھ نہیں ہے لیکن بلحاظ کسی اور شے کے جو کہ ریل سے باہر ہے وہ دونوں متحرک معلوم ہو گئے۔ اب خیال کرو کہ چلتی ہوئی ترین میں ایک شخص **کنارہ** سے بیٹھا ہوا ہو اور دوسرا گاڑی کے ایک کنارہ سے دوسرے کنارہ کی طرف حرکت کرے تو بلحاظ پہلے شخص کے یہ چلنے والا شخص حرکت کرتا ہوا معلوم ہوگا۔

کسی ایک متحرک ذرہ کے لحاظ سے دوسری ذرہ کی حرکت کو حرکت منتسب کہتے ہیں \*

۶۱) واضح ہو کہ دنیا میں جہاں کہیں حرکت نظر میں آتی ہے وہ حرکت منتسب ہو حرکت مطلق کہیں دیکھنے میں نہیں آتی۔ فرض کرو کہ ہم چلتے ہوئی ترین میں بیٹھے گاڑی کے ایک کنارہ سے دوسرے کنارہ کی طرف چلیں۔ تو ہماری حرکت بلحاظ اس کنارہ کے ہوئی جہاں سے ہم نے چلنا شروع کیا۔ مگر چونکہ ریل ساکن نہیں اس کے باہر کے کسی درخت وغیرہ کے لحاظ سے ریل متحرک ہو پر وہ درخت وغیرہ بھی زمین کے ساتھ اسکی روزانہ اور سالانہ حرکت میں شامل ہے ہر حرکتیں بلحاظ آفتاب کے ہیں۔ اور یہ بھی تحقیق نہیں کہ خود آفتاب

ساکن ہے یا متحرک۔ پس جب ہم کہتے ہیں کہ کوئی ذرہ حرکت کرتا ہے تو ہماری مراد ہوتی ہے کہ اسکی حرکت بلحاظ کسی دوسرے مقام کے ہے جسکو کہ ہم اسوقت ساکن فرض کر لیتے ہیں یعنی اُس ذرہ سے جسکو ہم ساکن فرض کرتی ہے دوسرے ذرہ کے فاصلہ اور سمت کے تبدیلیوں سے اسکی حرکت کا قیاس کرتے ہیں

(۶۲) حرکت منتب کے مقدار کو سرعت منتب کہتے ہیں۔ سرعت منتب کے مختصر تعریف یہ ہے کہ ذرہ آ کے لحاظ سے ذرہ ب کے سرعت منتب گ وہ سرعت ہو کہ اگر ذرہ آ ساکن رہتا اور ذرہ ب سرعت گ سے چلتا تو ہر لحظہ میں اُن دونوں کا فاصلہ اور ان کے درمیان کے خط کی سمت ویسے ہی رہتی جیسکہ انہی اپنی اپنی علیحدہ سے عنوان کے ساتھ چلنے سے ہوتی۔

(۶۳) تعریف مذکورہ بالا سے معلوم ہو گا کہ اگر دو متحرک ذروں میں کوئی مشترک سرعت موجود ہو تو وہ سرعت مشترک انہی سرعت منتب پر کچھ اثر نہ لگے گی مثلاً جیسے کہ مثال مذکورہ بالا میں ریل کی حرکت دونوں ایوز میں مشترک ہے اسلئے ریل کا متحرک یا ساکن ہونا انہی سرعت منتب پر کچھ اثر نہیں کرتا ہے۔ اسبطح زمین کی حرکت اُن تمام اشیاء کے لئے جو اُسکی سطح پر ہیں حرکت مشترک ہو اسلئے اُن اشیاء کی ایک دوسرے کے ساتھ جو سرعت یا حرکت منتب ہو وہ ویسی ہی رہتی ہے جیسے کہ اگر زمین ساکن رہے



ایک ذرہ کے حرکت متب بمحاذ دوسرے ذرہ کے سطح معلوم کی جاتی ہے۔  
قرض کر۔

کہ ۱ اور ۲ دو نمبر سے لحاظ

کسی تیسری ساکن ذرہ کے جداگنا  
گگ اور گگ سرعت یکساں ہے

حرکت کر رہے ہیں

اور خطوط آگ ادر پ۔ لا ان

سرغنوں کو مقدار اور سمت میں تقبیر

کرتے ہیں۔ یعنی ایک اکائی

وقت پہن جب ذرہ آ نقطہ

۱۔ سے چکر لفظ ک پر ہنسیا ہر

آسی وقت میں نورہ ب نقطہ ب سے چل کر لا پر پہنچتا ہے۔ ابتدا

میں دونوں کا فاصلہ ۱۲ ہے اور اس وقت کے انجام میں کتا ہے۔

اب اگر ذرہ ۱ کی حرکت کی سمت کے مخالف دونوں ذروں

ہر ایک مشترک معرفت گزراؤ کہ یہ تو ظاہر ہے کہ انہی معرفت

منتخب وہی رہیگی جیسی کہ پہلے تھی۔ اس سرعت کے زیاہدہ کرنے

سے ذرہ آ تو ساکن ہو گیا اور ذرہ ب کی سرعت مقدار اور سمت میں

مستعبار ہی الاضلاع لایح کے وتر سے تعبیر ہوگی اسلئے اکائی وقت

کے انجام میں نورونکا فاصلہ آدہ ہوگا :

لیکن دلا = ب چ = اک کے اور یہ تینوں خط متوازی سے  
 بھی ہیں اسلئے ۱ د = ک لا اور وی متوازی بھی ہیں (شکل ۳۳ مقالہ ۱)  
 فرض کرو کہ کائی وقت کا کوئی حصہ ص ہے اور خطوط اک  
 ب لا اور ب د پر جدا گانہ م ن ع ایسے نقطے لئے لگائے گئے ہیں  
 =  $\frac{ب ن}{ب لا} = \frac{ب د}{ب لا} = \frac{۱}{۱}$  پس اگر دونوں در سے اپنی اپنی  
 سرعتوں کے ساتھ چلتے تو ص وقت کے انجام میں ذرہ آ نقطہ  
 م پر اور ذرہ ب نقطہ ن پر جا پہنچتے اور اونکا فاصلہ م ن ہوتا  
 اور اگر ۱ ساکن رہتا اور ذرہ ب خط ب د پر حاصل سرعت کے  
 ساتھ حرکت کرتا تو ص وقت کے انجام میں ذرہ ب نقطہ ع پر  
 پہنچتا اور اسے اسکا فاصلہ ع آ ہوتا۔ مگر  $\frac{ب ن}{ب لا} = \frac{ب د}{ب لا}$   
 ∴ ع ن متوازی ہے دلا اور اسی لئے اک کو بھی  
 پہر  $\frac{ب ن}{ب لا} = \frac{ب د}{ب لا}$  (متناسب مثلثوں کے اصول سے) اور  
 $\frac{ب ن}{ب لا} = \frac{۱}{۱}$  ∴ ع ن = ام اور چونکہ یہ دونوں اسپین متوازی  
 ہیں اسلئے اع = م ن یعنی اس سے ثابت ہوا کہ اگر ذرہ آ ساکن  
 ہو اور ذرہ ب خط ب د کی سمت میں ایسی سرعت کے ساتھ جو  
 ب د سے تعبیر ہوتی ہو حرکت کرے تو ہر لمحہ میں اسکا فاصلہ اور  
 سمت حرکت ذرہ آ سے وہی رہیگی جو اُس حالت میں رہتی اگر دونوں  
 اپنی اپنی سرعت سے حرکت کرتی۔ پس ایک ذرہ کی سرعت نسبت بلحاظ  
 دوسری ذرہ کے معلوم کر نیکا قاعدہ یہ ہے کہ دونوں ذروں پر ایک

ایسی سرعت مشترک لگا دیں جو مقدار میں اس ذرہ کی سرعت کے برابر ہے کہ جس کے لحاظ سے سرعت منتجب معلوم کرنی ہے مگر سمت میں اس کی سرعت کے مخالف ہو اس سے وہ ذرہ ساکن ہو جاوے گا اور دوسری ذرہ کی اپنی سرعت اور سرعت زیادہ شدہ کا حاصل سرعت ہوگی وہی بلحاظ پہلے ذرہ کی دوسری ذرہ کی سرعت منتجب کہلا دی گی ۔

آ اور ب دو ذرہ ج و خط پر

(۶۴)

ب ج

جدہ لگانے سرعت بچان گ اور گ کو ایک ہی سمت میں حرکت کر رہے ہیں ذرہ آ کے لحاظ سے ذرہ ب کی سرعت منتجب معلوم کرنی ہے۔ فرض کرو کہ دو ذرہ ب و ج سمت ج میں سرعت گ لگائی جاوے۔ تو اس سے انکی سرعت منتجب میں کچھ فرق نہ آوے گا۔ مگر اس سرعت کے لگانے سے ذرہ آ ساکن ہوگا اور ذرہ ب سمت ج میں سرعت گ کی ساتھ حرکت کرتا رہے گا۔ اگر ذرہ آ کی نسبت ذرہ ب کی سرعت منتجب آ ہو تو م = گ۔

واضح ہو کہ اگر حرکت گ سے مقدار میں زیادہ ہو تو م منفی ہوگا یعنی اس سرعت منتجب کے سمت د سے ج کی طرف ہوگی۔ پس تو یہ معنی ہوئے کہ ذرہ ب رفتہ رفتہ ذرہ آ کے نزدیک ہوتا جاوے گا اس لیے انکی لحاظ سے ذرہ ب کی حرکت د سے ج کی طرف مفہوم ہوگی اور اگر گ = م ہوگا۔

یعنی اس حالت میں ذرہ کے بیچ کا فاصلہ ہر نقطہ میں برابر ہو گا اور ایک ذرہ کے لحاظ سے دوسرے ذرہ کے مقام کی تبدیلی کچھ نہیں ہوگی۔

(۶۵) جب دو ذرے مخالف سمتوں میں حرکت کریں تو بیان مذکورہ بالا سے معلوم ہو گا کہ ذرہ آ کے لحاظ سے ذرہ ب کی سرعت متب سرعت گ کی سمت میں مقدار میں برابر گ + گ کے ہوگی۔

(۶۶) واضح ہو کہ جیسا کہ اوپر ہم نے ذرہ آ کے لحاظ سے ذرہ ب کی سرعت متب معلوم کرنے کا قاعدہ بیان کیا اس طرح سے ذرہ ب کے لحاظ سے ذرہ آ کی سرعت متب معلوم ہو سکتی ہے غور کرنے سے معلوم ہو گا کہ یہ دونوں سرعت متب مقدار میں برابر ہونگی۔ مگر سمت بن مخالف۔ یعنی اگر آ کے لحاظ سے ب کی سرعت متب م ہو تو ب کے لحاظ سے آ کی سرعت متب -م ہوگی۔

(۶۷) اور ب دو ذرے گ اور گ جداگانہ سرعت بیان سے مختلف سمتوں میں حرکت کر رہے ہیں تو ذرہ آ کے لحاظ سے ذرہ ب کی سرعت متب معلوم کرو۔

نکال عدد ۶۳ سے اور اس حد کے بیان سے معلوم ہو گا کہ متوازی الاضلاع لاج تھا تو ب ذرہ آ کے لحاظ سے

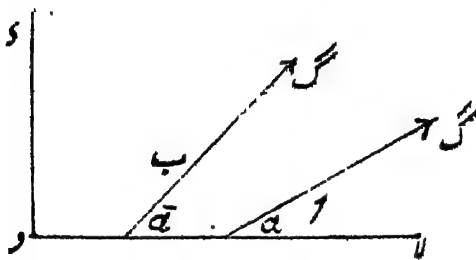
ذره ب کی سرعت منتصب کو مقدار اور سمت میں تبصیر کرتا ہے اسلئے  
اگر سرعت گ اور گ کی سمتوں کی درمیان کا زاویہ  $\theta = 180^\circ$  یہ  
لابج  $\theta = 180^\circ$

$$\therefore (ب د) = (ب ل) + (ب ج) + ۲ ب ل \times$$

$$ب ج \times جم ر (180 - \theta)$$

$$\therefore م^2 = گ^2 + گ^2 - ۲ گ گ جم \theta$$

(۶۸) دفعہ مذکورہ بالا میں کسی خاص محور و نہیں ذرہ کے  
سرعتوں کو منفصل کر کے بھی ہم سرعت منتصب کو معلوم کر سکتے ہیں



مثلاً فرض کرو

کہ سطح حرکت میں

و لا اور و لا دو

محور علی القوائم ہیں

اور سرعت گ اور گ

خط و لا کے ساتھ جدا گانہ  $\alpha$  اور  $\alpha$  زاویہ بناتے ہیں۔ اگر ان

سرعتوں کو محور و نہیں منفصل کر دو تو و لا محور میں اُنکے اجزاء منفصلہ

جدا گانہ  $\alpha$  جم  $\alpha$  اور گ جم  $\alpha$  کے برابر ہونگے اور

محور و لا میں جدا گانہ  $\alpha$  جم  $\alpha$  اور گ جم  $\alpha$  جب  $\alpha$

کے۔ اسلئے اگر محور و نی سمت میں بلحاظ ذرہ آ کے ذرہ

ب کی سرعت منتصب کے اجزاء منفصلہ جدا گانہ  $\alpha$  اور  $\alpha$  ہوں تو

۱۲ = گ جم ۵ - گ جم ۵

اور ۱۴ = گ جب ۵ - گ جب ۵ ..... (حد ۶۴)

۱۵ = م + م + م = گ + گ + گ - گ گ جم ۵ - گ جم ۵

اگر شکل سے ظاہر ہے کہ ۵ سے ۵ = برابر اس زاویہ کے ہے جو

گ اور گ کی سمت کے درمیان ہے اس لئے اگر یہ زاویہ = ۵

تو م = گ + گ + گ - گ گ جم ۵ جو کہ ۶ بن ہم ثابت کر چکی ہیں

فرض کرو کہ اس سرعت منتب کی سمت محور و اسے زاویہ

Φ بناتی ہے

تو شکل سے معلوم ہوگا کہ مسن Φ =  $\frac{۱۵}{۱۲}$  = گ جب ۵ - گ جب ۵  
گ گ جم ۵ - گ جم ۵

## سوالات باب ششم

(۱) کسی شخص کو جو بطرف پورب کے چار میل فی گھنٹہ سرعت سے

دوڑتا ہے معلوم ہوا کہ ہوا عین شمال کے رخ سے آتی ہے اور

جبکہ وہ دو گنی سرعت سے دوڑتا تو معلوم ہوا کہ گوشہ شمال شرق

سے آ رہی ہے تو بتاؤ کہ ہوا اہلین کس طرف سے آتی تھی -

اور اسکی سرعت کیا تھی

جواب شمال مغرب - سرعت = ۴ م

(۲) دو ذرے سرعت یکساں سے ایکساں میں چل رہے ہیں

کسی لفظ میں آونے درمیان کا فاصلہ = ۱ اور سرعت نسبتاً ایک کے  
 بلحاظ دوسرے کے = گ اور اگر گ کو اس خط میں جو کہ دونوں  
 ذروں کو ملتا ہے اور اس خط کے عمود میں منفصل کریں تو اجزاء منفصلہ  
 گ اور گ ہو گئے۔ ثابت کرو ان ذروں کا کم سے کم درمیانی فاصلہ  
 =  $\frac{1}{g}$  اور ابتدا سے اس ادنیٰ فاصلہ پر پہنچنے میں اونکا  $\frac{1}{g}$   
 وقت صرف ہوا

(۳) دو ذرے اسراع یکساں سے ایک خط مستقیم میں حرکت کرتے ہیں نو  
 ثابت کرو کہ اگر کسی لفظ میں اونچی سرعت کو کئی نسبت اونچی اسراع کو کئی  
 نسبت کے برابر ہو تو ایک کی سرعت نسبت بلحاظ دوسرے کے خط مستقیم  
 میں ہوگی اور اگر نسبتیں مذکورہ برابر نہ ہوں تو دریافت کرو کہ سرعت  
 نسبت ایک کے بلحاظ دوسرے کے سطح کی ہوگی

(۴) ایک پیہ جیسا کہ ۴ فٹ پر چہ میل فی گھنٹہ سرعت سے گھومتا چلا جاتا ہے  
 تو دریافت کرو کہ اسکے مرکز کے لحاظ سے ادھکی نقطہ راس اور  
 نقطہ اسفل کی سرعت نسبت کیا ہے اور یہ ہے معلوم کرو کہ سطح زمین  
 کے لحاظ سے اون دونوں نقطوں کی سرعت نسبت کیا ہوگی

جواب (۱) ۸۵۸ اور ۸۵۸ (۲) ۶۵۱۴ اور صفر

(۵) کوئی پیہ سطح زمین پر حرکت کرتا ہے۔ تو کسی لفظ میں اسکے نقطہ راس کی سرعت  
 کی نسبت کسی اور نقطہ کی سرعت کے ساتھ جو اسکے محیط میں ہو اور  
 زمین سے جیسی اونچائی فطر کے چوتھائی حصہ کے برابر ہو معلوم کرو۔ جواب ۱۱۲

# باب ہفتم

## حرکت کا اول قانون

(۶۹) کچھ ابواب میں ذرہ کے صرف تبدیلی مقام پر بحث کی ہے۔ اور اس بات پر کہ وہ تبدیلی مقام کس وجہ سے واقع ہوتی ہے کچھ خیال نہیں کیا۔ طاقت عامہ حرکت کی ابتدائی علت ہے۔ لیکن واضح ہو کہ طاقت کا عمل ذرہ پر ناممکن ہے کیونکہ ذرہ سے جسم کا اقل حصہ مراد ہے۔ تو مناسب ہو کہ جسم کی حرکت کا بیان کریں اور یہ بھی دکھلا دیں کہ ذرہ کی حرکت کے بیان سے جسم کی حرکت کس قدر سمجھ میں آسکتی ہے۔

(۷۰) واضح ہو کہ جسم ذروں سے مرکب ہے۔ اس لئے اگر ہم جسم کے ہر ایک ذرہ کی حرکت کو معلوم کر سکیں تو کل جسم کی حرکت معلوم ہو جاوے گی۔ مگر وقت یہ ہے کہ جسم کے ہر ایک ذرہ کی حرکت ایک قسم کی نہیں ہوتی۔ یعنی مختلف ذرے مختلف طور سے حرکت کرتے ہیں۔ اگر دنیا میں خواہ کسی جسم کی حرکت پر خیال کریں تو معلوم ہو گا کہ اُس میں کس قدر حرکت مذکور ہی موجود ہے۔ ایسی حرکت کا بیان ریاضی کی علی شاخوں سے متعلق ہے اس لئے یہاں بیان نہیں کر سکتے پس جس جگہ متحرک جسم کا بیان آویگا وہاں جاری مراد یہ ہوگی کہ اُس میں حرکت مدوری بالکل نہیں ہے اور اس کا ہر ایک ذرہ خطوط متوازی میں ایک ہی قسم کی



حرکت سے پہلے ہو۔ اور ایسا فرض کرنے سے جسم کو ایک ذرہ کی حرکت سے تمام جسم کی حرکت کو بغیر کرے گی

(۱۷) حکیم مشہور نیوٹن صاحب نے ایک مدت دراز کے مشاہدہ سے مادہ کی حرکت کے لئے تین قوانین دریافت کئے ہیں جو کہ علم حرکت کی بنیاد میں حقیقت میں جہم کیسی معین طاقت کے عمل کا صحیح صحیح نتیجہ مشاہدہ سے معلوم کرنا مشکل ہو۔ کیونکہ دنیا میں بہت سی طاقتیں ایک ساتھ ہی عمل کر رہی ہیں اور ان میں سے ہر ایک کو الگ الگ کر کے اسے عمل کی تاثیر علیحدہ علیحدہ دریافت کرنا قریباً ناممکن ہے۔ سب جگہ ہوا کی تحلیک اور سطح حرکت کے کبر در سے پن وغیرہ سے جسم متحرک کی حرکت میں تبدیلی واقع ہو جاتی ہے اور اس طرح سے مشاہدہ کی صحت میں فرق پڑ جاتا ہے مگر تب بھی ریاضی دانوں نے جسے المقدور ان طاقتوں کو علیحدہ کر کے کسی معین طاقت کے نتیجہ کو دریافت کیا ہے۔ ۲۔ اور ان قانون قوانین کو صحیح پایا۔

(۱۸) حرکت کا اول قانون یہ ہے۔ دنیا میں ہر ایک جسم یا تو ساکن رہے گا یا خط مستقیم میں سرعت یکساں سے حرکت کرتا رہے گا جب تک کہ کوئی طاقت بیرونی اس پر عمل کرے اس کی حالت سکون یا حرکت یکساں کو بدل دے۔ یعنی مادہ میں خود کسی طاقت کے پیدا ہونے کی تابیت نہیں ہے جب کوئی جسم حالت سکون میں رہتا ہے تو خود اس میں کوئی کسی طرح کی ہی طاقت نہیں کہ وہ اپنی جگہ کو بدل سکے اس لئے اس میں حرکت پیدا

ہونے کے لئے کسی بیرونی طاقت کا عمل ضروری ہے۔ اس طرح جب کسی طاقت کے عمل سے جسم میں حرکت پیدا ہو جاوے تو خود اس میں طاقت نہیں کہ یہ حالت سکون میں آ جاوے یا اس حرکت کو کبھی بہتے میں ماکنشی میں حرکت پیدا ہونا یا حرکت پیدا شدہ میں تبدیلی واقع ہونا بیرونی طاقت کی عمل سے ہی ہو سکتا ہے۔

اس قانون سے معلوم ہوتا ہے کہ جب ایک دفعہ کسی جسم میں حرکت ہو چکے تو آگے وہ جسم اس حرکت کے ساتھ برابر چلتا رہیگا۔ یعنی ضرر نہیں ہے کہ جب تک وہ چلتا رہے اس میں وہ طاقت جس سے حرکت پیدا ہوئی تھی برابر موجود رہے۔ اگر کوئی دوسری طاقت حرکت پیدا شدہ کو زائل نہ کرے یا نہ بدلائے تو وہ ہم دایم خط مستقیم میں حرکت کرتا رہیگا۔ کمان سے تیر و غیرہ اس قانون کے بموجب برابر حرکت میں نہیں رہتا اسکا باعث یہ ہے کہ ہوا کی شکلیک اور زمین کی کشش اور سطح حرکت کے کھردراپن وغیرہ مخالف طاقتوں سے یہ حرکت رفتہ رفتہ کھٹتے جاتی ہے۔ پس علمائے یہ ثابت کیا ہے کہ جب قدریوں مخالف طاقتوں کو مختلف ذریعوں سے کم کر جائیگی اس قدر جسم متحرک کی حرکت یکساں خط مستقیم میں زیادہ دیر تک قائم رہیگی۔ مثلاً تجربہ کیا گیا ہے کہ اگر کسی جسم کو سطح برف پر پہلایا جائے تو وہ بہت دور جا کر ٹھہرتا ہے اور اسکی سرعت یکساں بھی بہت دیر تک بدلتی جاتی ہے۔

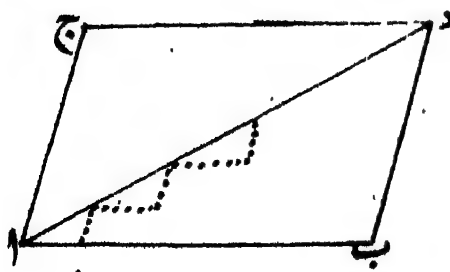
علمائے اس قانون کو زیادہ تر عمدہ ترکیب ثابت کیا ہے وہ کہتے ہیں  
 یہ ہے کہ اگرچہ وہ طاقتیں جو جسم کی حرکت میں تغیر پیدا کرتی ہیں  
 بالکل دور نہیں ہو سکتیں تاہم برابر مقدار کی طاقتیں مخالف سمت  
 میں لگا کر ہم اون مخالف طاقتوں کو زائل کر سکتے ہیں - ہم جانتر  
 پر کبھی مخالف طاقتوں کو عمل کے باعث جسم حالت اعتدال میں رہتا ہے  
 اور بعد ازاں اس جسم میں حرکت پیدا کی جاوے تو وہ مخالف طاقتیں اس  
 حرکت پر کچھ اثر نہیں رکھتیں - پس مشاہدہ سے تحقیق ہوا ہے کہ ایسی حالت  
 میں جسم کی حرکت ہمیشہ حرکت کے اول قانون کے موافق ہے -  
 باب یازدہم میں ایٹوڈ صاحب کے آدے کے بیان میں اس تجربہ کی تصدیق  
 ہو جاوے گی -

## بارہم شتم

### حرکت کا دوسرا قانون

اگر ہم حرکت کے دوسرے قانون کے دو حصے میں - اول یہ کہ جسم پر طاقت کا عاملہ کا اثر ہر حالت میں اُسکی اپنی سمت خط مستقیم میں ہوتا ہے دوم یہ کہ جسم میں طاقت کے عمل سے جو اسراع پیدا ہوتا ہے اُسکی مقدار طاقت مذکور کی مقدار کی متناسب ہے۔

اول حصہ کے معنی یہ ہیں کہ اگر کوئی جسم حالت سکون میں ہو یا متحرک نہیں اگر ایک یا ایک سے زیادہ طاقت عمل کرے تو ہر ایک طاقت ویسا ہی عمل کریگی جیسا کہ وہ اکیلی ہونے کی حالت میں کرتی۔ مطلب یہ ہے کہ جب وہ طاقتیں باہم عمل کرتی ہیں تو ایک دوسرے کے عمل میں یا اس جسم کی موجودہ سرعت میں کچھ دخل نہیں دیتیں پس دنیا میں اور شہار کی طرح طاقت بھی ضائع نہیں ہوتی دوسری کو ہی طاقت اُسپر عمل کر کے صرف اُسکی صورت میں تغیر پیدا کر دیتی ہے



اسکا مطلب شکل مندرجہ  
ذیل سے ظاہر ہوگا  
فرض کرو کہ کسی جسم  
پر جو نقطہ ۱ پر واقع  
ہو دو طاقتیں ا ب

اور آج کی سمت میں عمل کر رہے ہیں۔ اور ایک لحظہ عمل کرنے جو  
 سرعت ہماری پیدا کرتی ہیں وہ جدا جدا خط اب آج سے تعبیر ہو  
 ہیں۔ اب سرعتوں کے متوازی الاضلاع کے اصول سے ظاہر ہے کہ  
 حاصل سرعت وتر آد سے تعبیر ہوگی۔ حرکت کے دوسرے قانون  
 سے بخوبی معلوم ہو جائیگا کہ کیونکر ان دونوں سرعتوں کو ساتھ جسم خط آد  
 پر حرکت کرتا ہے اس قانون کے بموجب دونوں طاقتوں کا عمل ایک دوسرے  
 سے بالکل علیحدہ ہے اس لئے ظاہر ہے کہ کسی نہایت طویل عرصہ میں جبکہ  
 جسم سرعت آد کے ساتھ خط اب پر حرکت کرتے لگتا ہے تو اس  
 عرصہ میں وہ بسبب دوسری سرعت کے خط آج پر بھی حرکت کر نیکو ماثل  
 ہے۔ لہذا القیاس ہر لحظہ میں یہی عمل وقوع میں آتا ہے اور اسکا یہ  
 نتیجہ ہوتا ہے کہ انجام میں ذرہ نقطہ د پر پہنچتا ہے ذرہ کی بطور کی حرکت  
 میں دونوں طاقتوں کا عمل علیحدہ علیحدہ ظہور میں آتا ہے کیونکہ اگر صرف  
 پہلی طاقت عمل کرتی تو ذرہ اکائی وقت کے انجام میں نقطہ ب پر  
 پہنچتا اور اگر صرف دوسری طاقت عمل کرتے تو نقطہ ج پر پہنچتا۔ اب  
 ذرہ نقطہ د تک پہنچتا تو ہم خیال کر سکتے ہیں کہ اسنے پہلی طاقت  
 کے سبب سے خط آد کو طی کیا اور دوسرے کی سبب سے خط ب کو جو کہ  
 آج کے برابر ہے یعنی دونوں طاقتوں کے علیحدہ علیحدہ عمل سے جو  
 نتیجہ حاصل ہوتا وہی حاصل ہوا۔ دوسرے زیادہ طاقتوں کے لئے  
 بھی دلیل کا رد ہو سکتی ہے۔

حرکت کے دوسرے قانون کی مثال اکثر شاہدہ میں آتی ہے۔ جب کوئی ملاح اپنی ناؤ کو ایک کنارہ سے دوسرے کنارہ تک لیجانا چاہتا ہو تو اسی قانون کی پابندی سے مقابل کے کنارہ پر سببہ نہ نہیں جاسکتا مگر موج کے زور سے کچھ نیچے چلا جاتا ہے۔ ایک عمدہ مثال یہ بھی ہے کہ جب کسی جہاز کے مستول سے کوئی گیند گری تو جہاز روان ہو یا نہ ہو وہ گیند عین اوس مستول کے پاؤں میں گرتی ہے۔ یا اگر کوئی شخص روانہ ریل گاڑی پر سے ایک گیند کو سمت اس میں پھینکے تو وہ اسی کے ماتھے پر پہنچا پڑتی ہے۔ اب دیکھتا چاہئے کہ گیند کو مستول کے سر سے پاؤں تک گرنے میں جو وقت صرف ہوا ہو اُس وقت میں جہاز یہی کچھ فاصلہ پر چلا ہوگا تو گیند اتنا فاصلہ پہنچے گی کہ وہ نہ گرسے اسکا سبب یہ ہو کہ جس سرعت سے جہاز حرکت کرتا تھا وہ سرعت گیند میں بھی مشترکاً موجود تھی اور کشش ثقل کے عمل کے باعث نیچے گریں اسکی سرعت مذکورہ میں کچھ فرق پیدا نہیں ہوتا یعنی گیند یہ سبب اپنی سرعت مشترکہ کے اتنا ہی فاصلہ خط افقی میں طی کرے گی جتنا کہ کشش ثقل کے عدم موجودگی میں طی کرتی اور سیطیح کشش ثقل کا عمل بھی اُس پر دیا ہی ہوگا جیسا کہ جہاز کے ساکن رہنے سے ہوتا ہے پس نتیجہ یہ ہوتا ہے کہ اُن دونوں سببوں سے گیند مستول کے عین پاؤں پر گرتی ہے۔

(۷۵) اس قانون سے یہ بھی ظاہر ہوتا ہے کہ جب کوئی طاقت متعلقہ

کس جسم پر عمل کرے تو اُس کے نتیجہ میں اسراع یکسان پیدا ہوتا ہے کیونکہ اگر کوئی طاقت جسم پر یک نقطہ تک عمل کرے تو اُس کے نتیجہ میں جو سرعت پیدا ہوتی ہے حرکت کے پہلے قانون کے رو سے اُس جسم میں تیریکچان متحرک رہتا ہے۔ اس لئے اگر پھر دوسرے نقطہ میں وہی طاقت عمل کرے تو اُس سے جو نئی سرعت پیدا ہوتی ہے وہ اور سرعت اول ملکر دو چند ہو جاتی ہیں۔ اس طرح اگر وہ طاقت کچھ عرصہ تک عمل کرتا رہے تو جسم کی سرعت رفتہ رفتہ یکسان بڑھ جاتی ہے گویا جسم اسراع یکسان سے چلتا ہی جو طاقت جسم پر کچھ عرصہ تک عمل کرتی ہو اور جسکی مقدار برابر رہتی ہو اسی طاقت مستقلہ کہتے ہیں صدمہ وغیرہ کی طاقتوں سے اس میں فرق ہے (۷۶) حرکت کے دوسرے قانون کا حصہ دوم یہ ہے کہ طاقت کے عمل سے جو جسم پر اسراع پیدا ہوتا ہے وہ ہمیشہ طاقت کی مقدار کا متناسب ہے۔ اس قانون کی بخوبی سمجھنے کے لئے اول جسم اور طاقت کے ملپنے کے طریقہ پر خیال کرنا واجب ہے

(۷۷) بیان ہو چکا ہے کہ طاقت مستقلہ سے جسم میں اسراع یکسان پیدا ہوتا ہے۔ چنانکہ طاقت کے عمل سے جسم پر کوئی حرکت پیدا نہ ہوئی ہو ومان ضرور کوئی اور طاقت مخالف سمت میں عمل کر کے اُسے رائل کر دینی ہوگی۔ اور یہ بھی ظاہر ہے کہ جسم کا مقدار خواہ کس قدر صغیر یا کبیر ہو اگر کوئی طاقت مخالف نہ ہو تو طاقت عالمہ اُس پر ضرور کس قدر حرکت پیدا کرے گی ہم اپنی قوت بدنی سے کسی بہت بھاری پتھر کو اٹھا نہیں سکتے ہیں۔

اسکا یہ سبب ہو کہ کشش ثقل اُس پتھر پر جو کہ ہماری طاقت کے مخالف اور مقدار میں زیادہ ہے عمل کر کے اسے زائل کر دیتی ہے

(۷۸) چونکہ طاقت غیر محسوس ہے اور صرف حرکت پیدا کردہ سے اُسے

معلوم کرتے ہیں اسلئے اس کے مقدار کے ماننے کے لئے بھی اُس حرکت پر ہونے غور کرنا آسان طریقہ ہے۔ اس کے لئے عالموں نے مفصلہ ذیل

قاعدہ مقرر کیا ہے یعنی فرض کر کہ کوئی طاقت مستقل کسی جسم پر کسی وقت

معین تک عمل کر کے کس قدر سرعت پیدا کرتی ہے تو صاف ہو کہ کوئی

طاقت جو کہ اُسی جسم پر اُسی وقت تک عمل کر کے اُس کے دو چند سرعت

پیدا کرے وہ طاقت اول طاقت سے مقدار میں دو چند ہوگی۔ یعنی اگر

طاقت اول مقدار (۱) سے تعبیر کیا جائے تو طاقت دوم مقدار (۲)

سے تعبیر ہوگی اسی طرح طاقت اُس جسم پر اُسی وقت تک عمل کر کے تیس

سرعت پیدا کرتی ہو وہ مقدار میں بھی طاقت اول کے سہ چند ہوگی یعنی

مقدار (۳) سے تعبیر ہوگی اور علی ہذا القیاس۔ پس اس طرح طاقت کی

پیمائش جسم کی اکائی سرعت کی اکائی اور وقت کی اکائی تینوں پر منحصر

ہے یعنی یہ تین اکائیاں مختلف لینے سے طاقت کی اکائی بھی مختلف

ہو جائیگی۔ حکماء بنظر سہولیت ایسے طاقت کو اکائی فرض کرتے ہیں جو کہ

اکائی جسم پر اکائی وقت تک عمل کر کے اکائی سرعت کو پیدا کرتی ہے۔

مثلاً۔ اگر ایک سکینڈ اکائی وقت اور ایک فٹ اکائی فاصلہ ہو تو جو فٹ

اکائی جسم پر ایک سکینڈ تک عمل کر کے ہر سکینڈ میں ایک فٹ کے حساب



سرعت پیدا کرے اُسی مقدار (۱۰) سے تعبیر کیا جائیگا۔ اور اس طرح جو طاقت  
اُسے جسم پر ایک سیکنڈ تک عمل کر کے فی سیکنڈ مین ۱۰ فٹ کے حساب  
سرعت کو پیدا کرے اُسکو مقدار (۱۰) سے تعبیر کیا جائیگا۔ اس طرح کی جو اکائی  
طاقت لیجاتی ہے اسے علی اکائی طاقت کہتے ہیں۔

(۷۹) جسم کے کہتے ہیں ہر ایک کو معلوم ہے لیکن زبان سے اسکی  
تعریف مشکل ہے مختصراً جو شے طاقت سے منفعل ہو نیکی قابلیت رکھتی  
ہے اسے جسم کہتے ہیں مثلاً کسی شے کا عرض بنے رنگ طول وغیرہ  
خاصیتیں طاقت کو عمل کی قابلیت نہیں رکھتے ہیں اسلئے یہ خاصیتیں  
جسم کے معنی میں داخل نہیں۔ زمین پر جو شے موجود ہے سب پرکشش  
ثقل عمل کر کے اُس میں وزن پیدا کر دیتی ہے۔ پس اگر شے کو ایسی جگہ پر  
پہنچا ناممکن ہو تا جہاں کشش ثقل عمل نہ کرے تو اُسکا وزن کچھ نہ رہتا  
مگر اُسکا جسم موجود رہیگا۔ چنانچہ ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ جس خاصیت کے  
موجود ہونے سے کشش ثقل شے میں وزن پیدا کرتی ہے وہی اُس شے  
کا جسم کہلاتا ہے۔ جسم پر طاقت عالمہ جس قدر کے نتیجہ کی کمی زیادتی دیکھ کر  
جسم کی بھی کمی بیشی معلوم ہوتی ہے۔ مثلاً اگر کوئی طاقت کسی جسم پر کسی  
وقت معین تک عمل کر کے سیکنڈ مین دس فٹ کے حساب سرعت  
پیدا کرے اور یہی طاقت کسی دوسرے جسم پر اُسی وقت تک عمل کر کے  
سیکنڈ مین صرف پانچ فٹ کے حساب سرعت پیدا کرے تو صاف ظاہر ہے  
کہ یہ دوسرا جسم جسم مذکورہ سے دو چندان ہے اس طرح جس قدر سرعت کم

پیدا ہوگی جسم کا مقدار اسقدر زیادہ دریافت ہوگا جسم میں ایک ہی طاقت کے عمل سے جو سرعت کی کمی بیشی معلوم ہوتی ہے تو اسکا سبب یہ ہے کہ جسم ذرات کا ایک مجموعہ ہے اور چونکہ ہر ذرہ یکساں ہے اسلئے اگر کوئی طاقت کسی ایک ذرہ پر عمل کر کے ایک سیکنڈ میں ۱ فٹ کے حساب سرعت پیدا کرے تو کل جسم میں ۱ فٹ کے حساب سرعت کو پیدا کرنے کے لئے اسقدر زیادہ طاقت درکار ہے جبکہ اگر اُس جسم میں ذروں کا مقدار ہے اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ مختلف اجسام میں ایک ہی سرعت کو پیدا کرنے کے لئے طاقت عالم کا مقدار جسم کے مقدار کے متناسب ہونا چاہئے ہندسین سہولت کے لئے ایسے ایک جسم کو اکائی فرض کرتے ہیں کہ جس پر اکائی طاقت اکائی وقت تک عمل کر کے اکائی سرعت کو پیدا کرے یعنی جہاں اکائی اسراع کو پیدا کرے

(۱۹) پس بحث مذکورہ بالا سے ظاہر ہے کہ جب جسم کا مقدار مستقل رہے تو کوئی طاقت اس پر عمل کر کے جو اسراع پیدا کرتی ہے اسکا مقدار طاقت عالم کے مقدار کے متناسب ہوتا ہے یعنی اگر ط اور ع جداگانہ جسم ج پر طاقت عالم کو اور اسراع پیدا شدہ کو تعبیر کرے ہو تو ط و ع جیکہ ج مستقل ہے

اور یہ بھی ثابت ہو چکا ہے کہ ایک ہی اسراع پیدا کرنے کے لئے طاقت عالم کا مقدار جسم کے مقدار کے متناسب ہونا چاہئے یعنی ط و ع جیکہ ع مستقل ہے

۱۰ جیکہ اسراع اور جسم دونوں غیر مستقل تو ط و ع ج

∴ ط = م ج ع جہاں کہ م ایک مقدار مستقل ہے

اور جسکی قیمت طاقت اور جسم اور اسراع کی اکائیوں پر منحصر ہے لیکن یہ بیان ہو چکا ہے کہ حکمانے ایسی ایک طاقت کو اکائی فرض کیا ہے جو کہ اکائی جسم پر عمل کر کے اکائی اسراع پیدا کرتی ہے۔ اسلئے اگر طاقت کی یہ اکائی مان لی جائے تو

$$1 = م \times 1 \times 1 \quad \text{یعنی } م = 1$$

∴ ط = ج ع اکائی طاقت مذکورہ بالا

یعنی جو طاقت ج جسم پر عمل کر کے ع اسراع کو پیدا کرتی ہے

اسکا مقدار ج ع گنا اکائی طاقت کا ہے

(۸۱) حد ۳۳ میں بیان ہو چکا ہے کہ اگر کوئی ذرہ اسراع ع کے ساتھ

س دقت تک شریع سے چلکر آخر میں ل سرعت حاصل کرے تو ل ج ع دتا  
∴ ط =  $\frac{ل}{ج ع}$  اس سے ثابت ہوتا ہے کہ اگر وقت حرکت مقدار مستقل ہو

تو ط ∞ ج ل اور اگر اس طاقت کو اکائی فرض کی جاوے جو کہ اکائی جسم پر عرصہ س تک عمل کر کے اکائی سرعت حاصل کراتی ہے تو یہ نسبت مساوات ہو جاتی ہے یعنی ط = ج ل

(۸۲) تعریف - اگر کسی نقطہ میں کوئی جسم ج سرعت ل سے چلتا

ہو تو ج د ل اس مقدار کو اس نقطہ میں جسم کی قوت حرکت کہتے ہیں -

اس تعریف کا مطلب بیان ذیل سے حاصل ہو گا - فرض کرو کہ کوئی

جسم ج کسی نقطہ میں سرعت ل سے کسی سمت میں چلتا ہے -

اگر وہ ان اسکی حرکت روک دے تو اسکی حرکت کے روکنے کے لئے کسی طاقت کا ہونا ضرور ہے۔ ظاہر ہے کہ جس قدر طاقت اس لحاظ میں اس جسم پر اس سرعت کو پیدا کر دینے کے قابل تھے اسکی مزاحمت کے لئے بھی اسی قدر طاقت کے ہونے کی ضرورت ہے۔ یعنی جہل سے طاقت تبیر شدہ اس مزاحم طاقت کو بھی تبیر کر لے گی۔ اور جہل کی قیمت ل کے متناسب ہو یعنی جسم کی سرعت کم یا زیادہ ہونے سے اسکی قیمت بھی کم و بیش ہوتی ہے۔ اسی سبب سے جہل مقدار کو جسم کے اس لحاظ میں قوت حرکت کہنا درست ہو۔

توت حرکت (۸۳) ایسا خیال سحرنا چاہئے کہ جسم کی سرعت کی زیادتی ہے اسکی کمی زیادہ سے کم کا باعث ہے بلکہ جو جسم زیادہ طاقت سے متحرک کیا گیا ہو اسکی سرعت بھی زیادہ ہوتی ہے اسلئے طاقت عالمہ ابتداء میں کی زیادتی کو قوت حرکت کی زیادتی کا باعث سمجھنا چاہئے۔ مثلاً توپ کے گولہ کے قوت حرکت بہت ہے اسکا یہ سبب نہیں کہ اسکی سرعت زیادہ ہے بلکہ اسکا سبب یہ ہے کہ وہ ابتداء میں زیادہ طاقت سے متحرک کیا گیا ہے (۸۴) ط = ج ل اس مساوات سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ جسم کی قوت حرکت کسی لحاظ میں نہ صرف ل پر بلکہ ج پر بھی منحصر ہے یعنی اگر دو مختلف مشیا کی سرعت کسی لحاظ میں مساوی ہو تو اس شے کی قوت حرکت زیادہ ہوگی جسکے جسم کا مقدار زیادہ ہے۔ مثلاً بندوق کی گولی کا جسم صغیر ہے لیکن سرعت زیادہ ہونے سے اسکی قوت حرکت بہ نسبت ایک پہاڑی

پتھر کے جو تھوڑی سی سرعت سے متحرک ہو زیادہ ہو سکتی ہیں۔

(۸۵) جب کوئی شے سرعت مستوی سے متحرک ہے تب بھی جہل کو ایک قوت حرکت کہا جاتا ہے اس حالت میں شے پر کوئی طاقت عمل نہیں کرتی لیکن حرکت پیدا کر نیکے لئے ابتدا میں کوئی صدمہ وغیرہ کی طاقت ضرور لگائی گئی ہوگی جسکا مقدار اس قوت حرکت سے تعبیر ہوتا ہے۔ یہاں آں ایک مقدار مستقل ہے اسلئے قوت حرکت بھی ہر لحظہ میں مستقل رہیگی۔

(۸۶) جب طاقت مستقلہ عمل کر کے جسم پر اسراع یکساں پیدا کرتی ہے اس حالت میں آں کا مقدار ہر لحظہ میں بدلتا رہتا ہے اور اکائی وقت میں اسکے تبدیلی کو ہم اسراع کہتے ہیں اسلئے صاف ہو کہ اگر آں اسراع کو تعبیر کرے تو جہل قوت حرکت کی اکائی وقت میں تبدیلی کو تعبیر کرے گی۔ اس ہم جسم کی قوت اسراع کے نام سے نامزد کریں گے۔

(۸۷) چونکہ طاقت عاملہ اور جسم اور اسراع پیدا شدہ ہر تہ کی نسبت درمیانی نسبت ذیل سے ظاہر ہے

یعنی ط ∞ ج × ع

اسلئے حرکت کے دوسرے قانون کا بیان اس طرح بھی ہو سکتا ہے یعنی جسم پر طاقت عاملہ کا مقدار اسراع پیدا شدہ کے مقدار کے متناسب ہو چلنے کی اکائی طاقت اور اکائی اسراع اور اکائی جسم کے فرض کرنے سے یہ نسبت مساوات کے طور پر ہو جاتی ہے اور اسکا بیان حد (۸۸) میں ہو چکا ہے

(۸۸) جب کوئی جسم سرعت مستوی (م) سے کسی دائرہ کی محیط

میں حرکت کرتا ہے اسکا اسراع مرکز کی سمت میں برابر گھٹتا ہے  
یعنی اس اسراع کے ساتھ وہ جسم مرکز کی طرف جانیکی کوشش کرتا ہے  
(موجب حد ۸۵)

$$\text{اسلئے } \frac{\text{قوت اسراع}}{\text{جگہ}} =$$

اور چونکہ جسم ہر لمحہ میں مرکز کے ایک مستقل فاصلہ پر رہتا ہے اسلئے ظاہر  
ہے کہ ہر لمحہ میں مرکز کے مخالف سمت میں ایک طاقت اس جسم پر عمل  
کرسکے اوسکے مرکز کی طرف حرکت کو روک دیتے ہیں۔ ایسی طاقت کو  
قوت غائب کہتے ہیں اور اسکی قیمت جسم کی قوت اسراع مذکور کے برابر ہے  
اس طاقت کے پیدا ہونیکا سبب باب آئندہ میں بیان ہوگا ۔

## باب نہم

### سوم قانون حرکت

(۸۹) جہان جسم مفرد ہے و مان طاقت معین کے عمل سے جو حرکت پیدا ہوتی ہے اُس کا بیان حرکت کے اول اور دویم قانون سے متعلق ہے لیکن جب جسم ایک سے زیادہ ہین اور ایک دوسرے پر کسی طرح عمل کرتے ہین تو انکی حرکت کا صحیح بیان قانون سیوم سے متعلق ہے۔ وہ قانون حسب ذیل ہے :

جب ایک شے کسی دوسری شے پر کسی سمت میں کسی طرح پر عمل کرتی ہے تو دوسری شے بھی اول شے پر سمت مخالف ہین مقدار مساوی سے عمل کرتی ہو یعنی اشیاء کا باہمی عمل مقدار میں مساوی ہے مگر سمت میں مخالف ،

(۹۰) اشیاء ساکن ہون خواہ متحرک اُس کا باہمی عمل ہر حالت میں مساوی ہے۔ اور سمت میں مخالف۔ امثلاً ذیل سے اس کا مطلب معلوم ہو جائیگا :

(۹۱) کوئی شے میز پر رکھی ہوئی ہے کشش ثقل کے سبب سر وہ میز کو دباتے ہوئے ظاہر کر دیتا ہے کہ ہمیشہ شے زمین کے مرکز کی طرف حرکت کر نیکیو ساعی ہے اور میز جو سپردہ رہی ہے سمت مخالف میں اُس پر فعل انفعالی سے مساوی عمل کر کے اُسے اعتدال میں رکھتی ہے :

(ج) جب کوئی شے کسی رسی یا لٹھی سے دوسری شے کو کھینچے تو وہ دوسری شے بھی اُسے اپنی طرف مساوی طاقت سے کھینچتی ہے یعنی رسی کے ہر ایک نقطہ میں طاقت کشش متساویں مساوی ہے۔ علم سکون میں یہ نتیجہ اکثر مانا ہوا ہے ۔

(ج) جب کوئی شے کسی دوسری شے کو صدرہ دیکر اسکی حرکت میں تبدیلی کرتی ہو تو دوسری شے کے صدرہ سے اسکی اپنی حرکت میں بھی طاقت مساوی سمت مخالف میں تبدیلی آتی ہے۔  
(د) اگر کوئی شے کسی دیوار پر ٹھوکر کھائے تو دیوار بھی اُس پر مساوی طاقت سے سمت مخالف میں عمل کرتے ہوئے اور اسی سبب سے شے ٹوٹ کر دو ٹپا آتی ہے ۔

(۵) جب ایک شے دوسری شے کو کسی طاقت سے کھینچے تو شے مجبوراً بھی طاقت مساوی شے اول کو اپنی طرف کھینچتی ہے۔ اور یہ اشیا ساکن ہوں خواہ متحرک انکی کشش ایک دوسری پر ہر حالت میں مساوی ہے مثلاً زمین جس طاقت سے کسی شے پر کشش کرتی ہے وہ شے بھی برابر طاقت سے مخالف سمت میں زمین کو کشش کرتی ہے ۔

(۹۱) یہ مشہور نہ کرنا چاہئے کہ اشیا مساوی فعل فعالی اور فعل انفعالی کے تحت سے حالت سکون میں رہیں گے اور انہیں سے ہر ایک کے حرکت ناممکن ہے یعنی جب کوئی گھوڑا کسی گاڑی کو کھینچتا ہے تو گاڑی بھی اُسی طاقت سے اگر گھوڑے کو کشش کرے تو ہر دو حالت سکون میں رہیں گے۔



یہ شک غلطی پر مبنی ہے۔ کیونکہ حرکت کے قانون سیوم کا مطلب یہ نہیں کہ طاقت بیرونی کے عمل سے جسم پر حرکت نہوگی بلکہ خلاصہ یہ ہے کہ دو اشیاء کا عمل باہمی مساوی ہے یہ عمل باہمی بھی طاقت بیرونی کی طرح اسراع پیدا کرنیکی قابلیت رکھتا ہے۔ شے متحرک کے جسم کا مقدار اور طاقت عاملہ کے مقدار ہر دو پر خیال نہ رکھو کی سبب یہ غلطی واقع ہوتے ہے۔ مثال سے غور کرو کہ گھوڑا گاڑی پر جس طاقت سے عمل کرتا ہے وہ اسکے بدن کے جسم سے متعلق نہیں بلکہ بہانہ ایسا کہنا لازم ہے کہ گھوڑی کی طبیعی طاقت اپنے بدن اور گاڑی دونوں کے جسم پر عمل کر کے حرکت پیدا کر رہی ہے اجسام کا عمل باہمی اور اوپر طاقت بیرونی کا عمل ان ہر دو میں بڑا اختلاف سمجھنا چاہئے۔ حرکت کے دوسرے قانون کے بیان سے ہمیں معلوم ہوا ہے کہ جب کبھی کسی جسم پر کوئی بیرونی طاقت عمل کرتی ہے خواہ وہ طاقت کسی دوسری شے کی کشش وغیرہ سے پیدا ہوئے ہو یا اور کسی طرح سے تب اگر کوئی طاقت مخالف موجود نہ ہو تو اس میں حرکت ضرور پیدا کرے گی مثلاً کسی میز پر رکھی ہوئی چیز اوپر جو دباؤ کرتی ہے اس سے میز کی حرکت ضرور ہو سکتی ہے لیکن زمین کے فعل انفعالی نے مخالف سمت میں عمل کر کے اسی اعتدال میں رکھا ہے اس طرح میز بھی اس شے پر جو عمل مخالف کر رہی ہے اس سے شے کے اوپر لیطرف حرکت ہو سکتی ہے لیکن کشش ثقل نے اسکے برخلاف عمل کر کے اسی اعتدال میں رکھا ہے۔

حرکت کے دوسرے قانون بھی ظاہر ہے کہ ایک ہی طاقت مختلف اجسام پر عمل کر کے مختلف اسراع پیدا کرتی ہے۔ اسلئے دونوں اشیاء جو باہمی عمل کرتے ہیں اگر اُن کا جسم مختلف ہو تو سادی عمل سے بھی اُنکی حرکت پیدا شدہ مختلف ہوگی اسی طرح کسی گیند کی کشش زمین پر اور زمین کی کشش گیند پر باہم سادی ہے مگر گیند کا جسم چونکہ نہایت صغیر ہے اسلئے زمین کی عمل سے اُنہیں جواسراع پیدا ہوتا ہے وہ بہت زیادہ ہے اور زمین کا جسم بہت زیادہ ہونیکے سبب گیند کی کشش اُنہیں جواسراع پیدا ہوتا ہے نہایت کم بلکہ غیر محسوس ہے \*

(۹) بیان تذکرہ بالا کا علامت جبریہ سے اس طرح لکھا جاتا ہے  
فرض کرو کہ ج اور ج دو اشیاء کے جسم ہیں اور اُن کے باہمی عمل کی طاقت کا مقدار ط سے تعبیر ہے اور اس عمل سے ہر دو میں اسراع پیدا ہوتے ہیں وہ ع اور ع ہیں تو

$$ط = ج \times ع$$

$$ط = ج \times ع$$

$$ج \times ع = ج \times ع$$

$$ج = ج$$

یعنی اسراع پیدا شدہ ہر معمول کے جسم کے مقدار سے نسبت معکوس رکھتا ہے \*

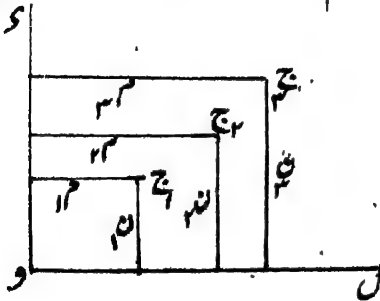
چند معمولی طے وہ جسم مراد ہے جس پر طاقت عامہ عمل کرتا ہو

## باب دہم

اجسام کے مرکز ثقل کی حرکت کے بیان میں

(۹۳) جسم کے مرکز ثقل کا بیان علم سکون سے متعلق ہے اور جبکہ اجسام کے مقامات معلوم ہوں تو ان کے مرکز ثقل کا مقام دریافت کر نیک طریق بھی اسی میں درج ہے مگر سہولیت کے

لئے کچھ بطور خلاصہ بیان لکھتے



ہیں +

فرض کرو کہ ج ۱ و ج ۲ و ج ۳

وغیرہ اجسام کے مقادیر ہیں

اور ول اور و و و محور علی التوائیم ہیں جنکے وسیلہ سے اجسام کے مقامات

کی محدودین معلوم ہیں یعنی و و و محور سے اجسام کے بُعد جداگانہ م ۱ و

م ۲ و م ۳ ..... وغیرہ ہیں اور ول محور سے ان کے بُعد جداگانہ

ن ۱ و ن ۲ و ن ۳ ..... وغیرہ ہیں تو علم سکون میں ثابت ہے کہ اگر

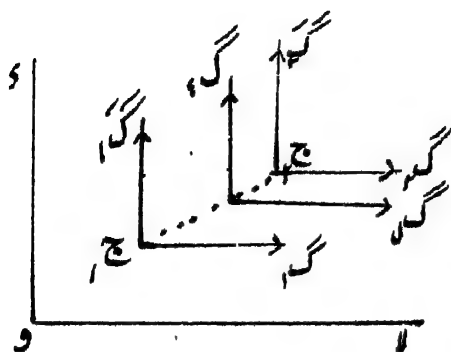
ان کے مرکز ثقل کا ان محور دن سے فاصلہ جداگانہ ن ۱ و ن ۲ و ن ۳ ہو تو

م ۱ ج ۱ م ۲ ج ۲ م ۳ ج ۳ ..... وغیرہ = م ۱ ج ۱ م ۲ ج ۲ م ۳ ج ۳ (ج ۱ + ج ۲ + ج ۳) مختصراً

اور ن ۱ ج ۱ ن ۲ ج ۲ ن ۳ ج ۳ ..... وغیرہ = ن ۱ ج ۱ ن ۲ ج ۲ ن ۳ ج ۳ (ج ۱ + ج ۲ + ج ۳) مختصراً

ج ۱ ج ۲ ج ۳ ..... وغیرہ = ج ۱ ج ۲ ج ۳ (ج ۱ + ج ۲ + ج ۳)

(۹۴) دو اجسام ج ۱ اور ج ۲ ایک ہی سطح میں حرکت کر رہے ہیں۔ کسی نقطہ معین میں اپنے مرکز ثقل کی سرعت دریافت کرو



فرض کرو کہ سطح حرکت

میں دو محور علی القوائم

ول اور دے لئے گئے

ہیں اور کسی خاص

نقطہ میں فاصلہ اجسام

کے ان سے جدا گانہ نا

۱ اور ۲ میں اب انفصال سرعت کے قاعدہ سے اجسام کی

سرعتوں کو محور و سنج متوازی منفصل کرو فرض کرو کہ دل کے متوازی

ہر دو سرعت کی اجزا منفصلہ گ ۱ اور گ ۲ ہیں اور دے کے متوازی

اسکی اجزا منفصلہ جدا گانہ گ ۱ اور گ ۲ ہیں اس لئے اگر اس نقطہ معینہ

میں اجسام کے مرکز ثقل کا فاصلہ محور دے سے تم ہو تو  $ج ۱ + ج ۲$

لیکن ایک عرصہ قلیل س کے بعد یہ اجسام اپنے مقام سے محور

دل کے متوازی جدا گانہ گ ۱ س اور گ ۲ س فاصلہ طے

کریں گے اس لئے اگر اس عرصہ کے آخر میں مرکز ثقل کا فاصلہ محور دے

سے تم ہو تو

$$تم = ج ۱ + گ ۱ س + ج ۲ + گ ۲ س$$

اسلئے اس محور کے متوازی مرکز ثقل کا فاصلہ طر شدہ

$$\frac{م - م}{ج + ج} = \frac{(ج ا گ + ج ب گ)}{ج + ج}$$

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ اگر اُس نقطہ میں مرکز ثقل کی سرعت کا جز منفصلہ  
وہی کے متوازی گس ہو تو

$$\frac{ج ا گ + ج ب گ}{ج + ج} = \text{گس}$$

$$\text{ب گس} (ج + ج) = ج ا گ + ج ب گ$$

اگر ج ا ب گ اور ج ب گ اوس نقطہ میں اجسام کے ول محور کے متوازی  
قوت حرکت کے اجزائے منفصلہ ہیں اسلئے اس مساوات سے یہ ظاہر ہوتا  
ہے کہ اگر متحرک جسم کو جو اسے حرکت کو ہم کسی خاص سمت میں منفصل کرے  
توان اجزاء منفصلہ کا حاصل جمع اُس قوت حرکت کے مساوی ہوتا  
ہے جیسا کہ وہ تمام اجسام مجتمع ہو کر ایک ذرہ کی مانند اپنی مرکز ثقل میں  
موجود ہونے کی حالت میں سمت مذکورہ میں پیدا کرتے  
اگر گاہ اوس نقطہ مرکز ثقل کی سرعت کا جوفہ منفصلہ محور و کے متوازی  
ہو تو

$$\frac{ج ا گ + ج ب گ}{ج + ج} = \text{گس}$$

اور اسلئے مرکز ثقل کی حاصل سرعت یا واقعی سرعت = م ا گ + ب گ



اور سن وقت کے بعد اسکا فاصلہ ل

$$= \frac{\text{ج} (ا + ع + س) + \text{ج} (م + ح + ع + س)}{\text{ج} + \text{ج}}$$

اسلئے وقت سن میں محور ول کے متوازی سمت میں مرکز ثقل کا فاصلہ طے شدہ =

$$ل - ل = \frac{1}{2} \times \frac{\text{ج} (ا + ع + س) + \text{ج} (م + ح + ع + س)}{\text{ج} + \text{ج}} \times \frac{1}{2}$$

اس مساوات سے ثابت ہوتا ہے کہ اگر محور ول کے متوازی سمت میں مرکز ثقل کے اسراع کا جزو منفصلہ ع سے تعبیر ہو تو  $\frac{\text{ج} (ا + ع + س) + \text{ج} (م + ح + ع + س)}{\text{ج} + \text{ج}}$  گر ج ع وغیرہ محور ول کے متوازی سمت میں اجسام کی قوت اسراع کی اجزائیں منفصلہ میں اسلئے یہ ثابت ہوتا ہے کہ کسی محور میں اجسام کے قوت اسراع کی جزو منفصلہ کا حاصل جمع اسقدر ہے جیسا کہ ان تمام اجسام کا ہر مرکز ثقل پر ذرہ کی طرح موجود ہونے سے پیدا ہوتا۔ دو سے زیادہ اجسام لے لئے بھی یہی بیان درست آسکتا ہے۔

(۹۷) واضح ہو کہ جسم ذرون کا مجموعہ ہے اسلئے کسی ایک جسم کے ہر ایک ذرہ کو علیحدہ علیحدہ جسم فرض کر کے مساوات متذکرہ بالا سے انکے مرکز ثقل کی حرکت دریافت ہو سکتی ہے۔

(۹۸) جب کسی متحرک جسم پر کوئی طاقت بیرونی یا طاقتہا سے بیرونی کا حاصل عمل کرتا ہے تو جسم نے دیکھا ہے کہ اسلئے نتیجہ میں اسراع پیدا ہوتا ہے کہ جسکا مقدار اس طاقت کے مقدار کے متناسب ہے۔ یہ کہ حرکت کے تسلسلے سے قانون

سے ظاہر ہے کہ جسم کے اندرونی ذروں کے فعلِ فعال اور فعلِ انفعالی مقدار میں مساوی اور سمت میں مخالف ہیں اسلئے یہ باہمی عمل بیرونی طاقت کے نتیجہ پر کچھ اثر نہیں کرتا اسلئے جب بیرونی طاقت یا طاقتوں کے عمل سے کسی جسم کی حرکت کا حال کسی نقطہ معین میں دریافت کرنا ضروری ہو تا ہے تو ہم فرض کر سکتے ہیں کہ کسی سمت میں اس طاقت بیرونی کا جزو منفصلہ اسی سمت میں جسم مذکورہ کی قوت اسراع پیدا شدہ کے متناسب بنے اگر کوئی طاقت ہو کہ قوت اسراع کے جزو مذکورہ کے پیدا کرنے کے لئے کافی ہو۔ سمت مخالف میں جسم پر لگایا جائے تو جسم کی حرکت کی جزو منفصلہ اس سمت میں زائل ہو جائیگی علامت جبریہ سے یہ نتیجہ حسب ذیل بیان کیا جاتا ہے۔

فرض کرو کہ کسی نقطہ میں محور والی اور وے کے متوازی سمت میں بیرونی طاقت عالمہ (یا طاقتہائے عالمہ کے حاصل) کے اجزاء منفصلہ جدا گانہ ملے اور ط ہے اور اُسے اسراع ہائے پیدا شدہ کی اجزاء منفصلہ ملے اور ع سے تعبیر میں تو اس لفظ میں جسم کی حرکت کو دریافت کرنے کے لئے حسب ذیل مساوات کافی ہیں۔

یعنی ط۔ ج ع = صفر

اور ط۔ ج ع = صفر

اگر جسم ایک سے زیادہ ہوں تو بسا اوقات بالائے مرکز ثقل کے دریافت کرنے کے لئے مفید ہو گئی مگر اس حالت میں ج کو اجسام کا مجموعہ ماننا چاہئے۔

(۹۹) مساوات مذکورہ بالا جسے کہ جسم کی حرکت پوری پوری دریافت ہوتی ہے حرکت کے تیسرے قانون کے ذریعہ سے ثابت کی گئی ہے لیکن ڈیلم بارٹ



صاحب نے اسکو سب سے پہلے ایجاد کیا تھا اسلئے یہ مساویں انہیں کے نام سے مشہور ہیں \*  
 (۱۰۵) ۸۶۵۸۵۷ سے ثابت کیا گیا ہے کہ اجسام پر بیرونی طاقت کا عمل ویسا ہی ہوتا ہے  
 جیسا کہ وہ اجسام اپنے مرکز ثقل پر موجود ہوں اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ اگر کوئی بیرونی  
 طاقت عمل کرے یعنی جہان اجسام کے اندر دنی فعل افعالی اور فعل افعالی کے سوا  
 اور کوئی عامل انہیں موجود نہ ہو تو اس حالت میں ان کے مرکز ثقل پر بھی کوئی طاقت عمل نہیں  
 کرتے اسلئے وہ مرکز ثقل یا تو حالت سکون میں رہیگا اور اگر متحرک ہو تو سرعت مستوی  
 سے خط مستقیم میں چلتا رہیگا (حرکت کی قانون اول پر لحاظ کرو)۔

مثلاً اگر تمام نظام شمسی کے ہر ایک سیارے یعنی آفتاب جہاں وغیرہ پر خیال کیا جاوے  
 تو معلوم ہوگا کہ ان سیاروں کی کشش باہمی مقدار میں مساوی اور سمت میں مخالف  
 ہے اور ان اندرونی کششوں کے سوا اور کوئی بیرونی طاقت اس نظام شمسی پر  
 عمل نہیں کرتی کیونکہ اس نظام شمسی کے بہت فاصلہ پر جو کہ اکب میں انکی کشش  
 بسبب نہایت بعد کے کچھ نہیں ہو سکتی۔ پس اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ نظام شمسی کا  
 مرکز ثقل جو کہ آفتاب کے اندر واقع ہے یا تو حالت سکون میں ہے اور اگر متحرک ہو  
 تو ایک خط مستقیم میں سرعت یکساں سے حرکت کرتا ہوگا \*  
 اشد متعلق باب نمبر ۱۰

(۱) ۴ پونڈ اور ۱ پونڈ کے مقدار کے دو شیا جدا گانہ ۸ فٹ اور ۲ فٹ فی سکند کی  
 سرعت سے ایک خط مستقیم میں متحرک ہیں ان کے مرکز ثقل کی حرکت دریافت کرو \*  
 جواب ۴

(۲) دو مساوی مقدار کے اجسام اکب ہی مقام سے دو خطوط مستقیم علی القواء میں

سرعت ۴ اور ۵ سے جدا گانہ حرکت کرتے ہیں انکے مرکز ثقل کی سرعت کیا ہوگی ؟

جواب : ۱۴

(۳۳) کوئی جسم نیچے گرنے ہوئے کسی دوسرے جسم کو جو اُسکے ساتھ اُسی سے بندھا ہوا ہے  
 کھینچ رہا ہے ابتدا میں اونکی سرعت منتفی کسی لخطہ معین میں اُنکے مرکز ثقل کی سرعت  
 دریافت کرو اور ثابت کرو کہ وہ مرکز ثقل اسراع مستوی سے ایک خط مستقیم میں حرکت  
 کر رہا ہے ؟

(۳۴) کسی مثلث کے ہر نہ تقاطذ وایا سے تین مساوی مقدار کی جسم اضلاع میں عالی ترتیب  
 ایسے سرعت مستوی سے منحرف کئے گئے ہیں جن سرعتوں کا مقدار جدا گانہ اضلاع مقدار  
 کے متناسب ثابت کرو کہ کسی ضلع کے متوازی سمت میں اجسام کے مرکز ثقل کی سرعت  
 کا جز و منفصلہ مساوی صفر کے ہے اور مرکز ثقل حالت سکون میں ہے ؟



# گیا رہوان باب

## کشش ثقل کا بیان

(۱۰۱) کشش ثقل دنیا میں ہر ایک جگہ اور ہر ایک شے پر عمل کر رہی ہے اور اسی کے سبب شے اوپر سے نیچے گرتی ہے اور شے کے وزن کا سبب بھی یہی ہے۔ اس لئے اس کشش کی ماہیت کا بیان کرنا یہاں مناسب ہو

(۱۰۲) جب کوئی شے اوپر سے نیچے کی طرف گرتی ہے تو ایک خط مستقیم میں گرتی ہے جسے خط سمت الاراس کہتے ہیں۔ زمین کی کشش ہی اس طرح شے کے گرنے کا باعث ہے۔ اور جس خط میں وہ گرے ہے وہ طاقت کشش کی سمت ہے۔ علماء نے بہت تجربہ سے ثابت کیا ہے کہ

(۱) ہر ایک شے زمین کے سب مقاموں پر اس مقام کے خط سمت الاراس میں گرتی ہے

(ب) گرنے والی شے کی حرکت اسراع مستوی سے متبدل ہوتی ہے یعنی باعث کشش ثقل کے گرنے والی شے کا کسی عرصہ میں شدہ فاصلہ اس وقت کے معذور کے متناسب ہو (دیکھو حد ۳۱)

(ط) ہر ایک شے کے لئے اسراع ایک ہی ہے یعنی شے کے جسم

کی کمی بیشی سے اس مراح کی قیمت میں کمی بیشی واقع نہیں ہوتی۔  
مثلاً اگر کوئی لوہے کا گیند اور کوئی پرکبو تر ایک ہی نقطہ میں ایک  
ہی ہندسی پر سے گرایا جائے تو دونوں ایک نقطہ میں زمین پر  
پہنچتے ہیں۔

(۱۰) زمین کی ہوا اس خط کی شکل سے تجارتی مذکورہ بالا میں  
بہت سی اختلاف واقع ہوتے ہیں مگر جبکہ انہیں منہج الہوا کے وسیلہ  
سے ہوا کو نکالا جائے تو یہ تجربی درست ہونگے اور یہ بھی واضح ہو کہ  
تجارب مذکورہ بالا صرف زمین پر مبنی قلیل کے لئے ہی درست  
ہیں اور نیز شے متحرکہ کے جسم صغیر کے لئے۔ پس یہ تمام تجارب  
عالم کی کشش ثقل کے قانون کے خاص نتائج ہیں نیوٹن صاحب  
نے اس قانون کو حسب ذیل مروج کیا ہے

جہاں ہر ایک ذرہ دوسرے ذرہ کو اپنی طرف ایک خط مستقیم میں  
کشش کرتا ہے اور اس طاقت کشش کا مقدار ان دونوں ذروں  
کے جسم کے حاصل ضرب سے نسبت رکھتا ہے اور ان ہر دو کے بعد کے  
مجدد نسبت معکوس رکھتا ہے یعنی اگر ج اور ج ان دونوں  
کے جسم کو تعبیر کریں اور ف انکا فاصلہ درمیانی ہو اور ک انکی  
طاقت کشش باہمی کو تعبیر کرے تو ک  $\propto$  ج ج

۱۰۔ کسی شے پر کشش ثقل یعنی کشش زمین کی دریافت  
کے لئے اول خیال کرنا چاہئے کہ زمین گول ہے اور یہ ثابت ہوا

ہے کہ کسی گول شے کی کشش کسی بیرونی شے پر اسی قدر ہوتی ہے جس قدر کہ وہ کشش کرنیوالی شے مجتمع ہو کر اپنی مرکز میں ایک ذرہ کے طرح موجود ہونے سے ہوتی اسلئے بیرونی شے پر زمین کی کشش اسی قدر ہے جیسے کہ تمام زمین باہر مرکز پر ایک ذرہ کی طرح موجود ہونے سے ہوتی اور اسلئے اس کشش کو کشش مرکز زمین یا کشش ثقل کہتے ہیں

فرض کرو کہ زمین کا جسم ج ہے اور اسکا نصف قطر  $r$  جو قریب مساوی ۳۰۰۰ میل کے ہے اور کسی بیرونی شے مجزوں کا جسم ج ہے اور زمین سے اسکی بلندی  $d$  ہے تو اگر  $k$  اونچی باہمی کشش کا بتیر کرے تو قانون مذکورہ بالا کے بموجب کہ  $\frac{J}{(r+d)^2}$  —

یعنی کہ  $\frac{J}{(r+d)^2} = \frac{J}{r^2}$  جہاں  $m$  مقدار مستقل ہے  
 (۱۰۵) واضح ہو کہ  $d$  کا مقدار بہ نسبت  $r$  کے نہایت کم ہے کیونکہ بڑے بلند پہاڑ کی چوٹی بھی ۵ یا ۶ میل سے مرتفع نہیں ہوتی اسلئے مساوی مذکورہ بالا سے ثابت ہوتا ہے کہ ج جسم پر زمین کی کشش ثقل  $k = \frac{J}{r^2}$  — تقریباً

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ  $k$  کی قیمت شے مجزوں کے جسم کے تناسب سے کیونکہ ج اور  $r$  مقداریں مستقل ہیں۔

چونکہ شے پر کشش ثقل کے مقدار کو اسکا وزن کہتے ہیں اسلئے ثابت ہوا کہ کسی شے کا وزن اس کے جسم کے متناسب ہو یعنی جسم کے زیادہ

ہونے سے زیادہ اور کم ہونے سے کم ہوتا ہے

(۱۰۶) حرکت کے قانون سوم سے ظاہر ہے کہ زمین جس طاقت سے کسی شے پر کشش کرتی ہے وہ شے بھی زمین کو طاقت مساوی سے اپنی طرف کھینچتے ہے

فرض کر دو کہ اس کشش باہمی کے سبب شے مجبور مرکز زمین کی طرف اسراع  $E$  سے متحرک ہے اور مرکز زمین بھی اوس شے کی طرف اسراع  $E$  سے متحرک ہے تو

$$E = \frac{K}{r^2} = \frac{M}{r^2} \quad \text{اور علیٰ ہذا القیاس۔}$$

$$E = \frac{K}{r^2} = \frac{M}{r^2} \quad (\text{دیکھو حد ۸۰})$$

اسلئے مرکز زمین کی طرف اس شے کا اسراع منتسب (یعنی اگر زمین ساکن رہے اور وہ شے صرف مرکز زمین کی طرف چلتی تو اس کا اسراع)

$$E + E = 2E = 2 \times \frac{M}{r^2}$$

واضح ہو کہ زمین پر اگر کسی شے کا خیال کیا جائے تو معلوم ہوگا کہ بہ نسبت جسم زمین کے اس شے کا جسم بہت ضعیف ہے اس لئے  $(E + E)$  قریباً  $E$  کے مساوی ہے اسلئے مرکز زمین کی طرف ہر شے کا اسراع  $E = \frac{M}{r^2}$  جو کہ مقدار مستقل ہے حد (۱۰۲) میں جو نمبر بیان کیا گیا ہے یعنی ہر شے ایک ہی اسراع سے نیچر گرتی ہے اسکا سبب یہی ہے

(۱۰۷) کشش ثقل سے گرنیوالی شے کا اسراع مرکز زمین کی طرف

مختلف ذریعوں سے معلوم ہو سکتا ہے اور زمین سے شاقول اور آلہ ایٹ و ڈوم صاحب کا اس مطلب کے لئے بہت مفید ہیں۔ ان آلہوں کا بیان آگے کیا جائیگا۔ کشش ثقل سے اسراع پیدا شدہ کو ہم ہمیشہ ق سے تعبیر کریں گے۔

(۱۰۸) زمین جسم کے ہر ایک ذرہ کو اپنے مرکز کی طرف کشش کرتی ہے مگر چونکہ اکثر اجسام کا حجم کم ہوتا ہے اس لئے اس کے کسی دو ذروں کا درمیانی فاصلہ بہ نسبت مرکز زمین کے فاصلہ کی بہت کم ہوتا ہے اس لئے شے کے ہر ذرہ پر کشش ثقل قریباً سمت متوازی میں ہوتی ہے اور اس لئے جسم پر حاصل کشش سب ذروں کی کششوں کے مجموعہ کے برابر ہوتی ہے مثلاً اگر ایک ذرہ پر کشش ثقل ط ہو تو شے کے دس ذروں پر کشش ثقل ط کا دس گنا ہو گا اور اس طرح بھی ظاہر ہے کہ ہر ایک شے پر کشش ثقل کی مقدار اس کے جسم کے متناسب ہوتی ہے۔

(۱۰۹) علم ہنیت میں یہ بات ثابت ہو چکی ہے کہ زمین بالکل گول نہیں ہے بلکہ نارنگی کی طرح دونوں قطبوں میں کمی قدر دبی ہوئی ہے پس خط استوا میں اس کا نصف قطر اطول ہے اور خط استوا کے جنوب یا شمال کی طرف رفتہ رفتہ نصف قطر کم ہوتا جاتا ہے حتیٰ کہ قطبین پر سب سے کم ہے حکیموں نے یہ بھی دریافت کیا ہے کہ خط استوا پر کا نصف قطر قطب کے نصف قطر سے قریب ۳۰ میل کے

زیادہ ہے۔ اسلئے مختلف عرضوں میں کشش ثقل بھی مختلف ہوتی ہے مگر چونکہ ان ہر دو نصف قطر کا تفاوت بہت کم ہے اسلئے مختلف عرض میں کشش ثقل کی قیمتوں میں بہت فرق نہیں ہوتا ہے تجربہ سے دریافت ہوا ہے کہ خط استوا پر اسراع کشش ثقل مساوی  $۳۲.۸$  فٹ فی سکینڈ ہے اور قطب پر  $۳۲.۲۵$  اور انگلینڈ میں  $۳۲.۱۹$  اور علی ہذا القیاس۔ لیکن جہاں بہت دقیق نتیجہ درکار نہیں ہوتا وہاں اسکی قیمت  $۳۲.۲$  یا صرف  $۳۲$  فرض کرنے سے مطلب حاصل ہو جاتا ہے

(۱۰) اس سے پہلے ذکر کیا گیا ہے کہ کشش ثقل ہی شے کے وزن کا باعث ہے جب کوئی شے سطح مستوی پر رکھی جائے تو اس سطح پر اسکا دباؤ طاقت کشش ثقل کے مساوی ہے اور اس دباؤ کی مقدار کو ہم شے کا وزن کہتے ہیں چنانچہ کسی شے پر جب کشش ثقل کا مقدار وہی اسکے وزن کا مقدار بھی ہے مثلاً اگر جسم ج کا وزن  $۱۰$  ہو تو اسکے یہ معنی ہیں کہ  $۱۰$  مقدار کی طاقت ج مقدار کی جسم پر عمل کرے اس جسم میں اسراع  $۱$  پیدا کر نیکیے قابل ہے۔  
 $۱۰ = ج \times ق =$  علی اکائی طاقت (دیکھو عدد ۸۰)

یعنی علی اکائی طاقت کے ساتھ ماپنے سے ج جسم کشش ثقل (یعنی جسم وزن کا مقدار) عدد  $۱۰$  سے تعبیر ہوتی ہے۔ جب کسی شے کا وزن دریافت کر نیکیے لئے مساوات بالا استعمال ہوتی ہے تب اسکا علی اکائی وزن کہتے ہیں اور ظاہر ہے کہ یہ



اکائی وزن اکائی جسم پرکشش ثقل کا ق حصہ ہے اسکی زیادہ  
تفصیل نیچے مذکور ہے

علمی اکائی طاقت وہ طاقت ہو جو کہ اکائی جسم پر عمل کرے گا اسراع پیدا کرتی  
ہے مثلاً اگر ایک سکینڈ اکائی وقت اور ایک فٹ اکائی فاصلہ ہو تو ظاہر  
ہے کہ اکائی جسم پرکشش ثقل علمی اکائی طاقت کا قریب ۳۲ گنا ہے کیونکہ  
وہ ۳۲ اکائین اسراع اس میں پیدا کرتی ہے اس سبب سے اکائی جسم  
کا وزن علمی اکائی طاقت کا ۳۲ گنا ہے مگر جسم ج کا وزن برابر ہے  
ج گنا اکائی جسم کے وزن کے یعنی برابر ہے ج  $\times ۳۲ \times$  علمی اکائی  
وزن کے یعنی علمی اکائی وزن کے ساتھ ماننے سے جسم ج کا وزن  
عدد ج ق سے بغیر ہوگا

(۱۱۱) چونکہ علمی اکائی طاقت برابر ہے اکائی جسم کا وزن اسلئے  
اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ اکائی جسم کو مختلف لینے سے علمی اکائی طاقت  
بسی مختلف ہو جائیگی

واقع ہو کہ بادشاہ ہر ایک ملک میں اکائی جسم کو مقرر کر دیتا ہے تاکہ  
ہر ایک شخص کے اپنی اپنی رائے سے مختلف اکائی جسم فرض کرنے سے  
خرید و فروخت میں قباحت پیدا نہ ہو۔ مثلاً ہندوستان میں ایسا  
ایک جسم اکائی فرض کر لیا جاتا ہے جسکو سیرکسٹین اور بنظر سہایت  
اس جسم کے وزن کو ہی سیرکسٹین میں

اور انگلینڈ میں ایسا ایک جسم اکائی فرض کیا جاتا ہے جسکو ایک پونڈ

کہتے ہیں اور اس جسم کا وزن بھی ایک پونڈ کہلاتا ہے  
 بحث مذکورہ بالا سے علمی اکائی طاقت یا وزن کی نسبت کسی خاص ملک کی  
 مقررہ اکائی وزن کے ساتھ معلوم ہوتے ہیں۔ مثلاً ہندوستان  
 میں علمی اکائی طاقت =  $\frac{1}{16}$  پونڈ وزن = قریباً آدھ چٹانک  
 وزن کے اور انگلینڈ میں علمی اکائی طاقت =  $\frac{1}{16}$  پونڈ وزن =  
 آدھ اولس کے۔

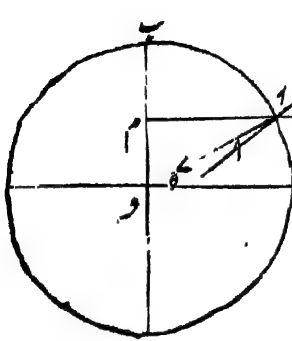
واضح ہو کہ عام زبان میں جب ہم ایک پونڈ کسی شے کے وزن کو  
 کہتے ہیں تو علمی وزن سے ماپ کر اسے ایک پونڈ نہیں کہتے ہیں کیونکہ  
 حاکم نے جس کیم اکائی مقرر کیا ہے اس کے وزن کو بھی ایک پونڈ مقرر کیا  
 ہے یعنی عام زبان میں اکائی جسم بھی کا وزن اکائی وزن ہے اسے  
 عام زبان میں جب ہم کہتے ہیں کہ کسی شے کا وزن ۵ پونڈ ہے  
 تو اس کا جسم بھی اکائی جسم سے ۵ گنا ہے یعنی عام زبان میں  
 جو مقدار وزن کو تعبیر کرتا ہے وہی اس کے جسم کو بھی تعبیر کرتا ہے  
 مگر اس کی وجہ سے علمی اکائی وزن سے ملنے والا مقدار قیاس کے ہر  
 ایک اکائی جسم کے وزن کو تعبیر کرتا

(۱۱۲) یہ ذکر ہو چکا ہے کہ زمین کے مختلف عرضوں میں نصف قطر کے  
 اختلاف سے کشش ثقل کی قیمت مختلف ہوتی ہے

علاوہ ازیں زمین گریڈیں گردش محوری بھی اس اختلاف کا ایک بڑا سبب  
 ہے۔ اس کا کچھ مختصر بیان کر کے ہم اس باب کو ختم کرینگے۔

علم ہست میں یہ ثابت ہو چکا ہے کہ زمین اپنے محور پر یکساں طور پر گردش کرتی ہے یعنی ۲۴ گھنٹہ میں ایک دفعہ گھوم آتی ہے اس لئے زمین کے اوپر ہر ایک شے بھی ۲۴ گھنٹہ میں ایک دفعہ اپنے عرض پر گردش یکساں کرتی ہے اور مختلف عرضوں میں اس کی سرعت گردش مختلف ہوتے

ہے



فرض کرو کہ زمین بالکل گول ہے اور اس کا نصف قطر  $m$  ہے اور محور پر سرعت الزاویہ  $\omega$  سے گردش کرتی ہے مقام  $A$  پر جبکہ عرض  $\theta$  ہے کوئی ایک

جسم  $J$  واقع ہے جو کہ بسبب

گردش محوری کے ۲۴ گھنٹہ میں یکساں حرکت کر کے ایسا ایک دائرہ

بناتا ہے جبکہ نصف قطر  $m$  ہے اور  $m = r \cos \theta$

حدہ میں بیان کیا گیا ہے کہ جب کوئی شے دائرہ میں گردش کرتی ہے تو

اس میں ایک اسراع دائرہ کے مرکز کی طرف ہوتا ہے اور اس لئے اس

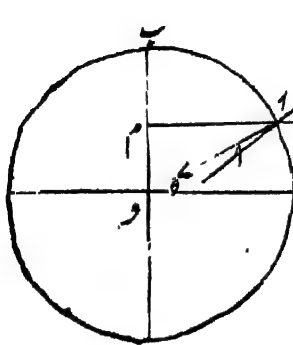
شے کو دائرہ پر رکھنے کے لئے مخالف سمت میں ایک مساوی طاقت

کی ضرورت ہوتی ہے جسے قوت ثارہ کہتے ہیں یہاں اس

سطح زمین کی استقامت جیسے کہ وہ نئے رکھی ہی بجائے طاقت ثارہ

کے ہے چنانچہ سمت آد میں اس طاقت کی مقدار

علم ہیت میں یہ ثابت ہو چکا ہے کہ زمین اپنے محور پر یکساں طور پر گردش کرتی ہے یعنی ۲۴ گھنٹہ میں ایک دفعہ گھوم آتی ہے اس لئے زمین کے اوپر ہر ایک شے بھی ۲۴ گھنٹہ میں ایک دفعہ اپنے عرض پر گردش یکساں کرتی ہے اور مختلف عرضوں میں اس کی سرعت گردش مختلف ہوتے ہے



فرض کرو کہ زمین بالکل گول ہے اور اس کا نصف قطر  $m$  ہے اور محور پر سرعت الزاویہ  $\omega$  سے گردش کرتی ہے مقام  $A$  پر جبکہ عرض  $\theta$  ہے کوئی ایک جسم  $J$  واقع ہے جو کہ بسبب

گردش محوری کے ۲۴ گھنٹہ میں یکساں حرکت کر کے ایسا ایک دائرہ

بناتا ہے جبکہ نصف قطر  $m$  ہے اور  $m = r \cos \theta$

حدہ میں بیان کیا گیا ہے کہ جب کوئی شے دائرہ میں گردش کرتی ہے تو

اس میں ایک اسراع دائرہ کے مرکز کی طرف ہوتا ہے اور اس لئے اس

شے کو دائرہ پر رکھنے کے لئے مخالف سمت میں ایک مساوی طاقت

کی ضرورت ہوتی ہے جسے قوت ثارہ کہتے ہیں یہاں اس

سطح زمین کی استقامت جیسے کہ وہ نئے رکھی ہی جائے طاقت ثارہ

کے ہے چنانچہ سمت آد میں اس طاقت کی مقدار

ص - ص = ج سرکہ ج ۵

اس مساوات سے صاف ظاہر ہے کہ کسی شے کے اصلی وزن اور ظاہری وزن کا فرق اُس کے مقام کے عرض پر منحصر ہے اور عرض زیادہ ہونے سے یہ فرق کم ہوتا ہے اور کم ہونے سے زیادہ

خط استوا پر  $\theta = 0$  اس لئے یہ فرق وہاں سب سے زیادہ ہے اور قطب پر  $\theta = 90$  اس لئے یہاں یہ فرق سب سے کم ہے

(۱۱۳) چونکہ خط استوا پر  $\theta = 0$  اس لئے وہاں ج ق - ج ق = ج سرکہ یعنی ق - ق = سرکہ

لیکن  $۴۰۰۰$  میل کے اور  $\frac{۲}{۶۰} \times ۶۰ = ۲$  فی سکنڈ میں  $\theta = 1116$  قریباً

لیکن تجربہ سے معلوم ہے کہ خط استوا پر ق - ق یعنی کشش ثقل ظاہری کسی شے پر  $= ۳۲.۰۹$  : وہاں اصلی کشش ق  $= ۳۲.۲$  قریباً

(۱۱۴) زمین کے نصف قطر کے اختلاف اور گردش محوری کے سبب سے مختلف عرضوں پر شے کا وزن ظاہری مختلف ہوتا ہے مگر اصلی

وزن اور ظاہری وزن کا فرق ہر جگہ نہایت کم ہوتا ہے واضح ہو کہ اگر یہ فرق زیادہ بھی ہوتا تو عام ترازو یا کائنات میں یہ فرق

دریافت نہیں ہو سکتا - کیونکہ ہر دو پتوں کے اشتباہ پر سبب مذکورہ ایک ہی طرح عمل کر کے آئیں وزن ظاہری میں ایک ہی قسم کا فرق

پیدا کرتا ہے مگر یہ فرق بذریعہ شاقول یا کمافی در ترازو کے

بحجوبی معلوم ہو سکتا ہے اور اسی فرق کے مشابہہ سے عالمون نے زمین کی گردش محوری اور مختلف عرضوں میں اس کے نصف قطر کے اختلاف کی پوری پوری تحقیق کی ہے

## مشالات در باب قوانین حرکت و کشش ثقل

(۱) اگر ایک فٹ اکائی فاصلہ فرض کیا جاوے اور اکائی سہم کے وزن کو اکائی طاقت فرض کیا جاوے تو اکائی وقت دریافت کرد

جواب  $\frac{1}{32}$

(۲) کوئی جسم جسکا وزن ایک ہزار پونڈ ہے ایسی ایک رستی سے بندھا ہوا ہے جسکی لمبائی سو فٹ ہے اور جو کہ چار سو سچاس پونڈ وزن تک سہا رہ سکتی ہے اگر رستی کا ایک سر قائم رکھکر ایک دائرہ میں سرعت یکسان سے گھمایا جاوے تو دریافت کرد کہ کس قدر سرعت کے ساتھ کہانے سے وہ رستی ٹوٹ جائیگی

جواب ۳۸۵.۶

(۳) خط استوا پر کشش ثقل ۳۲.۲ ہے ثابت کرد کہ اگر زمین ۲۴ گھنٹہ میں تھریٹیا، ا دفعہ گردش کرتی تو خط استوا پر شجر کا ظاہری

وزن کچھ نہوتا۔

(۴) ایک ریل گاڑی جسکا جسم ۲۱ ٹن ہے ایک دائرہ مین فی گھنٹہ ۳۳ میل کی سرعت سے متحرک ہے جسکا نصف قطر ۴۰ گز ہے طاقت کشش ثقل کو اکائی فرض کر کے ماننے سے اُسکی قوت تار بہ کس قدر ہوگی

جواب ۳۱۴ ٹن

(۵) سطح مستوی پر ایک ۱۰ پونڈ کے وزن دار شے کو رکھ کر نیچے کی طرف سرعت آ سے متحرک کیا گیا تو دریافت کر دو کہ اس سطح پر جسم کا و باؤ کس قدر ہوگا

جواب ۱۰ (ق-۱۰)

(۶) کسی شے پر ۴۰ ق کے مقدار کی طاقت عمل کر کے ۲ سینڈ مین اسکو سمت الہ اس مین ۲ فٹ تک اٹھاتی ہے تو اس شے کا جسم دریافت کرو

جواب  $\frac{۴۰ ق}{۱+۲}$  پونڈ  
(۷) کوئی طاقت کسی ۱۰ پونڈ وزن کے جسم پر ایک سینڈ عمل کر کے فی سینڈ ۲ فٹ کے حساب سرعت پیدا کرتی ہے تو دریافت کر دو کہ وہ طاقت کتنا وزن سہار سکتی ہے

جواب  $\frac{۲۰ ق}{۱+۲}$

(۸) کوئی ایک طاقت جو کہ چار پونڈ وزن سہار سکتی ہے سطح افقی ہموار پر ۱۰ پونڈ جسم کو کھینچ رہی ہے تو ۴۰ فٹ پہنچے

مین اسکا کتنا وقت صرف ہوگا اور اسکے انجام مین اسکی عت

محصہ کیا ہوگی۔ جواب اول  $\frac{21}{2}$  دوم  $\frac{12}{2}$  ق

(۹) دریافت کرو کہ ایک اونس کی طاقت ایک پونڈ کے جسم پر عمل کر کے آدھے سکند مین کتنا فاصلہ طے کرایگی

جواب ۳ انچ

(۱۰) کسی سطح پر ایک ۸ پونڈ کا جسم رکھ کر اس سطح کو فی سکند ۱۲ کے انہراج کے حساب سے سمت الراس مین اٹھایا جاتا ہے تو اس سطح پر شے کا دباؤ دریافت کرو

جواب ۸ (۱۲ + ق)

(۱۱) اگر دو فٹ فاصلہ اکا ہی فاصلہ ہو اور اکا سے جسم کا وزن اکا ہی وزن ہو تو مساوات  $=$  ج ق مین اکائی وقت کیا ہونا چاہئے

جواب  $\frac{1}{2}$  ایک سکند کا

(۱۲) کسی جسم کو ایسے ایک دائرہ مین جبکہ نصف قطرہ فٹ ہے اسطرح یکساں طور پر گھمایا جاتا ہے کہ وہ ۵ سکند مین ایک مرتبہ گھوم آتا ہے تو طاقت مار بہ اسپر کیا ہوگی

جواب  $\frac{2}{3}$

(۱۳) ایک پونڈ جسم دو گز لبنی رستی کو ایک سر سے باندھ کر اور دوسرے سرے کو فٹ ۸ م رکھ کر سطح افقے مین گھمایا جاتا ہے اسی کی کشش ۳ پونڈ وزن کے برابر ہے دریافت کرو کہ جسم ایک فی



کہو نہیں گنا وقت صرف ہوگا جواب ۲ π ۲ — سکند

(۱۴) کسی رستی کے ہر دوسرے جہاں ج اور ج دو جسموں کو  
باندھ کر سطح استوی پر اس طرح گھمایا گیا ہے کہ وہ دونوں جسم دونوں  
میں متحرک ہیں اور رستی کا کون نقطہ حالت سکون میں ہوگا

جواب اجسام کا مرکز ثقل

زہا) پ پونڈ جسم کو ایک آ فٹ لمبی رستی کے ایک سرے میں  
باندھ کر اسکے دوسرے سرے کو قائم رکھ کر سطح افقی پر یکساں  
گھمایا جاتا ہے وہ رستی ہر ج پونڈ وزن سہاڑ سکتی ہے تو  
دریافت کرو کہ جسم ج کی سرعت کہاں تک زیادہ سے زیادہ  
ہو سکتی ہے جس سے رستی ٹوٹ جائے

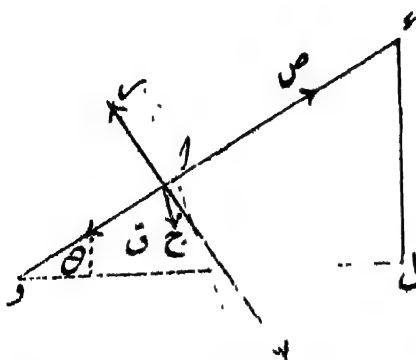
جواب ج

# بارہوان باب

سطح مائل پر حرکت کو بیان مین

(۱۱۵) تعریف - جب کوئی سطح سطح اقصیٰ سے گزراویہ بنائے  
تو اسے سطح مائل کہتے ہیں اور جو زاویہ یہ اس سے بناتی ہے اسے  
سطح مائل کا میدان کہتے ہیں

(۱۱۶) یہ ظاہر ہے کہ جب کسی سطح مائل پر کوئی شے بے کشش نقل  
کے متحرک ہے تو اسکی



حرکت اس سطح راس  
مین ہوگی جبکہ سطح مائل  
اور سطح افقی ہر دو پر  
عمود ہو اس شکل مین  
وہ سطح مائل پر شے کا  
خط حرکت ہے وہاں سطح

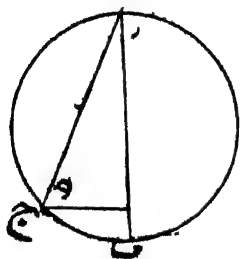
زمین ہے اور وہاں سطح مائل کی بلندی ہے اور ج اسکا میدان  
مقام ۱ پر کسی جسم ج پر کشش نقل یعنی اسکا وزن ج ق  
نچلی طرف عمل کر رہی ہے۔ اگر اس طاقت کو خط و و اور سطح

کے خط عمودی میں منقطع کیا جائے تو معلوم ہوگا کہ عا کی سمت میں جزو  
منفصلہ سطح مایل پر شے کی حرکت میں کچھ اثر پیدا نہیں کرتا بلکہ سطح کی  
فعل انفعالی سوزا میل ہو جاتا ہے اور خط ۱ و کی سمت کا جزو منفصلہ یعنی  
ج ق ہے جب ۵ اسراع پیدا کرتا ہے اسلئے اگر سطح بالکل ہموار ہو  
تو ۱ و کی سمت میں شے کا اسراع = ہے ق جب ۵ اس سے  
ظاہر ہوتا ہے کہ سطح مایل پر کسی ذرہ کی حرکت کے دریافت کرنے کے لئے باب سیموم  
کی حدود میں اسراع یکساں کی بابت جو قواعد ثابت کئے گئے ہیں وہی عمل  
میں آئیں گے۔ صرف ان حدود میں اسراع کی علامت کی جگہ ق جب ۵  
کو رکھنا چاہئے۔

اگر سطح مایل ہموار نہ ہو تو اسکی تشکیک (ط) شے کی حرکت کے برخلاف  
سمت میں عمل کرے گی اور اگر سطح کی انتقامت مساوی ص کے ہو تو تجربہ سے  
معلوم ہے کہ ط = لا ص جہاں لا ایک مقدار متقل ہے

اسلئے ط = لا ج ق جم ۵ (دیکھو علم سکون)  
اسلئے اگر شے کی حرکت سمت آدین ہو تو اس پر اسراع پیدا کر نیوالی  
طاقت = ہے ج ق جب ۵ - لا ج ق جم ۵  
اور اس طاقت سے اسراع پیدا ہوتا ہے وہ = ق (جب ۵ - لا جم ۵)  
اگر سمت حرکت آدین ہو تو شے کا اسراع = ق (جب ۵ + لا جم ۵)  
واضح ہو کہ اس اسراع کی قیمت ہر حالت میں ق سے کم ہے  
(۱۱۶) فرض کر دو کہ کسی شے نقطہ آ سے حالت سکون سے شروع کر

سطح مایل پر پھسلتی ہے جبکہ وہ نقطہ اپریٹیکلی تو اس سطح میں اسکی سرعت  
محصلہ =  $\frac{۲}{۳} \times \text{جب } ۵ = ۱۰$  م ق عمل لیکن اگر وہ شے نقطہ سے  
خط سمت الراس میں گرتی تو مقام ل پر اسکی سرعت محصلہ بھی ہوتی  
(دیکھو حد ۳۲) پس اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ سطح مایل کے براس سے کسی  
پھسلتی والی شے کی کسی مقام تک آنے میں وہی سرعت محصلہ ہوتی  
ہے جو راس سے سمت الراس میں گر کر سطح افقی تک پہنچنے میں حاصل ہوتی



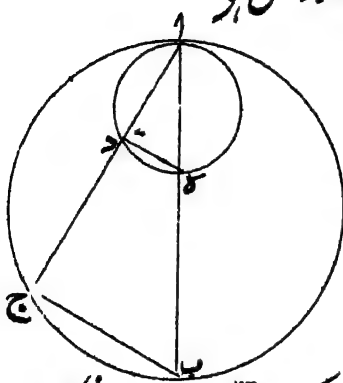
ہو کہ اس مقام سے گذرتی ہو  
(۱۱۸) سطح راس کے کسی دائرہ  
کے نقطہ اعلیٰ سے کسی وتر میں گذرنی  
والی شے کا وقت حرکت مستقل ہوگا

اور اسکی قطر راس کے گزینے جو وقت صرف ہوتا ہے اس کے مساوی ہوگا  
فرض کرو کہ اب دائرہ کا قطر سمت الراس ہو اور اوج کوئی وتر ہے جسکی  
سطح افقی سے میلان ۵ ہے اس وتر میں شے کی حرکت ویسی  
ہوتی ہے جیسی کہ سطح مایل میں اسلئے اوج کی طرف اس کا اہلے  
= ق جب ۵ لیکن چونکہ زاویہ اوج ب قائمہ ہے اسلئے زاویہ  
ا ب ج = ۵ اور بموجب حد ۱۱ وتر ا ج پر شے کے گزینے کا وقت =  
ما ق جب ۵ =  $\frac{۱۲}{۲۵} = \frac{۱۲}{۲۵} = \frac{۱۲}{۲۵}$  م ق = قطر ا ب پر شے کی

گزینے کا وقت جو کہ ایک مقدار مستقل ہے

اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ دائرہ کے نقطہ اسفل سے گذرتی ہوئے

قطر پر کسی شو کا وقت حرکت مقدار متقل ہے



(۱۱۹) جب سطح راس مین

و دایره نقطه اعلی من اندر

کی طرف مس کریں تو اس نقطہ

سے گذرتی ہوئی کسی وتر کے

اُس حصہ پر جو ہر دو دایہ کے

درمیان ہے گرنیوالی شیو کا وقت حرکت مستقل ہوتا ہے شکل مندرجہ

حد بالا سے معلوم ہو گا کہ شو کا وقت حرکت دج پر = وقت حرکت اج پر

وقت حرکت اولیہ = وقت حرکت اب پر۔ وقت حرکت ۵ پر

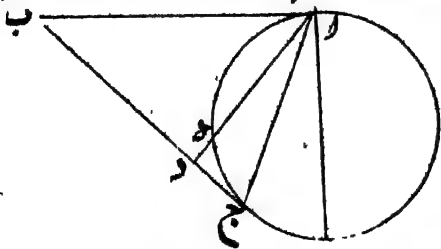
= وقت حرکت ہ ب پرچہ کہ ایک مقدار مستقل ہے +

اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ نقطہ انفل سے گذرتی ہوئی کسی وتر کے اچھے

پھر جو وائرون کے درمیان واقع ہے شے کے گرنیکا وقت مستقل ہے۔

(۱۲) دعویٰ مذکورہ بالا کی رو سے سطح راس میں شکر کا خط سطح کنزول

بعض حالتوں میں دریافت ہو سکتا ہے اسکی کئی ایک مثالیں ذیل میں



روح بین \*

(۱) کسی سطح راس مین

یو مئی نقطہ اور کوئی ایک

نقطہ ب ج ہے نقطہ ا سے

خط ب ج تک ایک ایسا خط کھینچو کہ جس میں ایک ذرہ وقت اقل  
میں اُس خط پر پہنچ سکے ۛ

تھیک ایسا دائرہ کھینچو کہ جس کا نقطہ اعلیٰ اوہو اور جو کہ ج ب خط کو پھر کسی  
نقطہ ج میں مس کرے تو ا ج خط مطلوب ہو گا کیونکہ اگر نقطہ ا سے خط  
ب ج تک اور کوئی خط مثلاً او د کھینچا جاویں تو وہ دائرہ کو کسی نقطہ  
پر قطع کرے گا تو اوہ پر ذرہ کے گزرنیکا وقت = ا ج پر گزرنیکے  
وقت کے بیکر اوہ پر گزرنے کا وقت وہ پر گزرنیکے وقت سے زیادہ ہے  
اس لئے ا ج پر گزرنیکے وقت سے بھی زیادہ ہے اور اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے  
کہ اگر نقطہ ا سے خط ج ب تک کوئی اور خط کھینچا جاوے تو اس پر ذرہ  
کے گزرنیکا وقت ا ج پر گزرنیکو وقت سے زیادہ ہو گا ۛ

(ب) کسی خط میں سے کسی نقطہ معین تک خط سیلج النزول دریافت کرو  
ایک ایسا دائرہ کھینچو کہ جس کا نقطہ اغل نقطہ معین ہو اور جو خط معین کو بھی  
مس کرے تو نقطہ تماس اور نقطہ معین کے ملائے سے ج خط بنتا ہے  
وہ خطی مطلوب ہو گا اس کا ثبوت حصہ ۱۱۸ کے بموجب ہے ۛ

(ج) کسی دائرہ کے نقطہ بیرونی سے اُس دائرہ تک خط سیلج النزول  
دریافت کرو نقطہ معین اور دائرہ کے نقطہ اغل کو مل کر وہ خط  
کو ان نقاط کے ملائے سے پیدا ہو گا

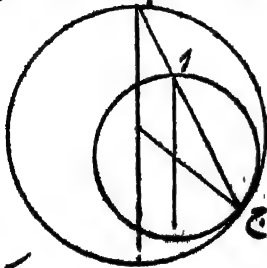


اس کا جھنڈہ حصہ دائرہ سے باہر سے  
واقع ہو رہی خطہ ہاں باہر سے ہوتی ہے ۛ

(د) کسی دائرہ کے محیط سے کسی معین نقطہ بیرونی تک خط سیرج النزول  
دریافت کرو۔

دائرہ کے نقطہ اعلیٰ اور نقطہ معین کو ملائے سے جو خط پیدا ہوتا ہے  
اُس کا جس قدر حصہ اُس دائرہ کے باہر واقع ہو وہی خط مطلوب ہوگا  
یہ بھی ۱۱۸ کے بموجب ثابت ہو سکتا ہے۔

(د) کسی دائرہ کے اندرونی نقطہ معین سے اُس دائرہ کے محیط تک خط  
سیرج النزول درپا کر دو۔

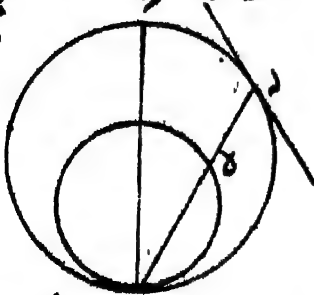


ایک ایسا دائرہ کھینچو جس کا  
نقطہ اعلیٰ اسی ہو اور جو دائرہ معین

کو کسی نقطہ ج میں مس بھی کرے  
یا یہ کہ جو دائرہ معین کو نقطہ اعلیٰ تک نقطہ ۱ کو ملاؤ اور خط وصل کنندہ

کو محیط دائرہ تک بڑھاؤ تو اچ خط مطلوب ہوگا۔ دیکھو حصہ ۱۱۸

(د) کسی دائرہ کے بیرونی کسی خط سے اُس دائرہ کے محیط تک خط سیرج النزول  
دریافت کرو ایک ایسا دائرہ



کھینچو جو کہ دائرہ معین کو نقطہ  
اغل ج میں اور خط معین

کو کسی نقطہ دپس کر فرض

کر دو کہ خط د ج دائرہ کو نقطہ ۲ پر قطع کرتا ہے تو د خط مطلوب

اسکے ثبوت کے لئے یاد رکھنا چاہئے کہ شکل مندرجہ شاخ (ج) میں ثابت ہو چکا ہے کہ خط مطلوب ضرور نقطہ ج سے گزرے گا اور بموجب حد ۱۱۹ کے خط اب سے دائرہ کے محیط تک خط سطح التزول دے ہو گا۔

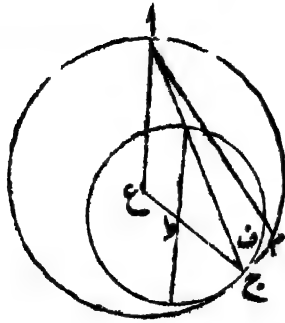
(ز) کسی دائرہ معین کے محیط سے کسی اور دائرہ اندرونی کے محیط تک خط سطح التزول دریافت کرو۔

دونوں دوائر کے نقاط نقل کو ملا کر خط جو ملے گا وہ خط کا جو حصہ ہر دو دوائر کے باہر میں واقع ہے وہی خط مطلوب ہو گا۔ اس کا ثبوت مثل ثبوت بالا کرے۔

ہم نے اشکال متذکرہ بالا میں سطح ماس کو جسم کی سطح حرکت فرض کیا ہے اگر ذرہ کی سطح حرکت سطح مائل ہو تو بھی بیان مندرجہ بالا درست ہو گا صرف ایسی حالت میں سطح مائل پر حرکت کے سبب اس سطح شش نقل کو قیاساً جب لینا چاہئے جہاں کہ یہ سطح مائل کامیلاً ہو۔

حد ۱۱۹ اور ۱۱۸ کی مدد سے سطح ماس میں خط سطح التزول بھی معلوم کیا جاتا ہے۔ اس کی ایک مثال نیچے بھی جاتی ہے۔ فرض کرو کہ جب سطح کوئی دائرہ جس کا مرکز ج سے ہے اور ایک نقطہ ہے جو کہ دائرہ کے نقطہ راس سے اوپر واقع ہے تو نقطہ اسے دائرہ تک خط سطح التزول دریافت کرو۔





و ب خط کو دائرہ کے محیط تک بڑھاؤ  
تو خط اوج خط مطلوب ہوگا

فرض کرو کہ اوج خط اس ہے اور خط ج ط ا سکو نقطہ ع پر  
قطع کرتا ہے۔ تو ظاہر ہوگا کہ اوج = ج ع اسلئے ایک دائرہ  
جسکا مرکز ع ہے اور نصف قطر ج ہے دائرہ ب ج د کو نقطہ  
ج پر مس کرے گا اور د اس کا نقطہ راس ہوگا و ف د کوئی خط کینچ  
میں معلوم ہوگا کہ خط اوج پر کسی ذرہ کے وقت حرکت خط اوج  
پر یا سکی وقت حرکت کے برابر ہے اور چونکہ یہ وقت خط و ف پر  
وقت حرکت سے زیادہ ہوا سلئے اوج پر وقت حرکت بھی و ف پر وقت  
حرکت سے زیادہ ہے۔ پس ثابت ہو کہ نقطہ ا سے دائرہ  
ب ج د تک جو خط کینچیں جاوین ان میں خط اوج پر کسی ذرہ  
کے حرکت سے پہلے ہوتی ہے۔ اسلئے خط اوج خط بطی الغرول  
ہے۔

و د ہوا سطح یا بل راس پر طلی ہوتی ہیں



= ش - ج ق جب م

نوع = ج ق جب م - ش = ش - ج ق جب م (دیکھو حد ۸۰)

نوع = ج جب م - ج جب م = ج ق ..... (۱)  
ج + ج -

اورش = (جب م + ج م) ج ج ق ..... (۲)  
ج + ج -

مسادات (۱) سے ظاہر ہوتا ہے کہ اس طرح یکسان ہو اور اگر اجسام کی سرعت ابتدائی معلوم ہو تو اس کا فاصلہ طر شدہ وقت حرکت اور سرعت محصلہ وغیرہ باب سوم کی حدود سے دریافت ہو جائینگے حد مذکورہ کی کئی خاص صورتیں بیان کی جاتی ہیں \*

(۱) مسادات اول سے ظاہر ہے کہ اگر ج جب م = ج جب م ہو تو ج برابر ہو کرے ہو گا گویا اس حالت میں ہر دو جسم یا تو حالت سکون میں رہیں گے یا اگر متحرک ہوں تو سرعت یکسان سے متحرک رہیں گے (ب) اگر ج جب م بڑا ہو ج جب م سے تو جسم ج کو اوپر کی طرف کھینچے گا \*

(ج) اگر جسم ج خط سمت الہامین نیچے گر کر جسم ج کو سطح مائل پر اوپر لائے گا کوشش کرے تو م = ۹۰ + ادع = ج - ج جب م اتق اس سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر ج جب م ج سے تو اس طرح ج کا سطح مائل کے نیچے کی طرف ہو گا \*



اسکے اوپر ایک چھوٹی سی پھر کی ہر اور اسکے دور کا محور اور دو چھوٹے  
 پھر ہر پر رکھا ہوا ہے تاکہ پھر کی گھومانی میں کچھ طاقت صرف نہ ہو  
 کہ کوئی ایک حلقہ ہر چکر اس بنے میں کسی جگہ چر کے ذریعہ سے لگا  
 ہین اور اس طرح د ایک پھٹی ہر جو پنج سے اس بنے میں کی جگہ لگ سکتی ہر  
 اس پھر کی کو اوپر سے ایک رستی دونوں طرف لٹکتی ہر جسکے ساتھ  
 دو مساوی وزن کے جسم بندھی ہوئی ہین۔ اور تجربہ کے تغیر  
 و تبدل کے لئے کئی چھوٹی چھوٹی دھڑلہ لگائی گئی ہیں اس لئے کہ ساتھ  
 ہوتی ہر۔ اس آله کا اصل مدعا کشش ثقل کا دریافت کرتا ہے اور وہ  
 طریقہ ذیل سے معلوم ہوتا ہے غرض کہ وہ آله میں جسم ج ارتفاع  
 اعلیٰ پر واقع ہے تو چونکہ ج اور ج برابر ہین اسلئے ابتدا میں انہیں  
 کچھ حرکت نہ ہوگی آتب اگر جسم ج پر ایک سوچ کی طرح لمبا جسم آ رکھا  
 جاوے تو جسم ج ۴ نیچر کی طرف کرنے لگیگا اور اس کا مقدار بقدر  
 کم ہوگا اسی قدر اسکا اسراع بھی کم ہوگا کیونکہ  $E = \frac{W}{g}$  (باقی رہے دیکھو ص ۱۲۱ شاخ ۴)  
 جنیہ جسم (ج ۴) حلقہ ۴ پر پہنچتا ہے تو جسم ج اس حلقہ  
 میں سے گزر جاتا ہے مگر اس کے اوپر ایک رہتا ہے اس لحاظ  
 سے رستی کی سر دین پر ہر دو جسم برابر ہو جاتے ہین اور اسلئے اسراع  
 کچھ نہیں ہوگا۔ مگر ابتدا سے وہ یک گرنے ہین جسم ج نے بقدر  
 سرعت حاصل کی ہر اسی سرعت سے وہ نیچے کی طرف یکساں طور  
 گرتا رہوگا (موجب اول قانون حرکت) اور آخر میں پہنچ دہا کہ ٹہیر



(ب) حد ۸۰ میں ثابت ہوا ہو کہ جب کوئی طاقت ط جسم ج پر عمل کر کے اسے پیدا کرتی ہے تو ط ۵۵ ج ع۔ ٹیوڈ صاحب کے آلہ کے متجربہ سے اس نسبت پر بھی اطمینان ہوتا ہے۔ اس آلہ میں شے کا اسے =  $\frac{۱۲۱}{۱۰۰}$  (دیکھو حد ۱۲۲)

مگر واضح ہو کہ یہاں جسم کا وزن ہی اسے کا باعث ہے اور یہ وزن جسم (۲ ج + ۱) پر عمل کر کے اس اسے کو پیدا کرتا ہے اب اگر آئینہ میں جسم کو مختلف لیا جائے مگر جسم ج کو ایسا بدلتا جائے کہ (۲ ج + ۱) ایک ہو رہے تو مثلاً ۱۰ سے معلوم ہو گا کہ ہر حالت میں اسے ج جسم کا متناسب ہو یعنی اس سے ثابت ہوتا ہے کہ کسی جسم مفروضہ متحرک کا اسے پیدا شدہ طاقت مطالہ کے متناسب ہو

پھر اگر اسے کو مستقل رکھ کر صرف جسم (۲ ج + ۱) کو بدلا جائے تو مثلاً ۱۰ سے معلوم ہو گا کہ اسے پیدا شدہ جسم (۲ ج + ۱) سے نسبت معکوس

رکتا ہے پس ان ہر دو سے ثابت ہوتا ہے کہ ط ۵۵ ج ع (ج) حد ۱۰ میں کہا گیا ہے کہ کشش ثقل ایک طاقت مستقل ہو یعنی جسم پر یکشش اسے یکساں پیدا کرتی ہو، ٹیوڈ صاحب کے آلہ سے اسکی بھی تصحیح ہو جاتی ہے مثلاً اگر حلقہ کو بلے کے مختلف مقامات پر لگایا جائے تو مثلاً ۱۰ سے معلوم ہو گا کہ فاصلہ ب و ح حالت میں ص وقت کا متناسب ہو گا اور جسم ج اور اس کو خواہ سیٹھ چلا جائے اس مثلاً ۱۰ کی تصحیح میں کچھ فرق نہیں آئے گا اسے جسم

مہر کشش ثقل جو کہ جسم (۲ ج + ۱) کی اسراع کا باعث ہے ضرور  
ایک طاقت مستقل ہو (دیکھو حد ۳۲) اور مادہ خواہ کسی قسم کا  
ہو یہی نتیجہ مشاہدہ سے حاصل ہوگا۔

واضح ہو کہ ہوا کی ٹھیک رستی کے لاطبقی وغیرہ کے باعث سے مشا  
ہد کو رہ بالالین بہت فرق آجاتا ہے اس لئے حکماء نے کشش ثقل  
کے مقدار کے دریافت کے لئے ثاقول کے مشاہدہ کو ترجیح دی ہے  
کام بیان باب آئندہ میں ہوگا۔



## مشالات متعلق با دوازدہم

(۱) کوئی ذرہ کسی ہمواسط مایل پر پھسلتا ہے اور اس پر پھسلتے ہوئے جب قدر  
عرصہ صرف ہوتا ہے کسی دوسری ذرہ کو عرصہ حرکت کا جو سطح مایل کی چوٹی  
سے سطح راستہ نہیں گزرتا ہے نہ گننا ہے تو اس سطح مایل کا مسابا جیسا  
لہو۔ جواب اجبتا (ن)

(۲) ایک سطح مایل پر چبکا زاویہ میلان ۴۵ ہے سرعت ابتدائی ق  
سے اس کے ارتفاع کی طرف کوئی ذرہ محذوف ہوا تو ق فٹ سطح  
اثر نے مین اسے کس قدر عرصہ لگے گا۔ جواب ۲۰ سکنڈ

(۳) کوئی سطح مایل کے طول کو ایسے دو حصوں پر تقسیم کرو کہ  
ذرہ پہل کر مساوی وقت میں ہر دو حصوں کو طے کرے۔ جواب ۱:۳

(۴) کسی سطح مایل کو جس کا طول ۴ ہے ان حصوں میں تقسیم کرو تاکہ  
کوئی ذرہ پہل کر ایک حصہ کو مساوی وقت میں طے کرے۔ جواب  
۱:۳:۴

(۵) کسی سطح مایل کا طول ۴ ہے اور ارتفاع ۳۔  
سے کوئی ذرہ نیچے کی طرف خط اس سے گرایا ہے اسے اس کی چوٹی  
سے دوسری ذرہ کو کس سرعت ابتدائی سے پہلایا جائے تاکہ ہر دو ذرہ

ایک ہی لمحہ میں سطح مستوی پر پہنچیں۔ جواب ۲:۱

(۶) سطح راس میں کوئی ایک دائرہ ہو اس کا وہ قطب معلوم کرو کہ جس سے  
 ذرہ کو گزرنے میں ابھی قدر وقت لگے جتنا کہ قطر سمت الراس گزرنے میں  
 لگتا ہو۔ جواب میلان = ۶۰°

(۷) سطح راس پر دو دائرہ ہیں جو کہ ایک دوسرے کو مس کرتی ہیں  
 ایک کا نقطہ اعلیٰ اور دیکم کا نقطہ سفلی تیسری دائرہ اول پر کوئی نقطہ فرض  
 کرو اور نقطہ تماس سے اوسو وصل کر کے دوسری دائرہ کے محیط تک بڑھا دو  
 تو ثابت کرو کہ اس خط پر کسی ذرہ کے پہنچنے کا وقت ہر حالت میں مستقل  
 رہے گا۔

(۸) سطح راس پر کسی دائرہ کے نقطہ اعلیٰ سے آج سے آج کوئی وتر کھینچا گیا ہو  
 اور اس وتر کو قطر فرض کر کے دوسرا دائرہ بنایا گیا نقطہ جب پہلا اول دائرہ  
 کا تماس دوسری دائرہ کو نقطہ ج پر قطع کرتا ہے ثابت کرو کہ خط ج ب پر  
 کسی ذرہ کے پہنچنے کا وقت مستقل رہے گا۔

(۹) مفضہ ذیل حالتوں میں کسی ذرہ کا خط یلح النزل دریافت کرو۔

(ا) کسی دائرہ کے محیط سے اس کے اندرونی نقطہ معین تک

(ب) دائرہ کے محیط سے اس کے بیرونی نقطہ معین تک

(۱۰) کسی جگہ جو ایک ہی سطح میں نہیں ہیں نقطہ راس پر ملای ہوئی ہیں ایک  
 ہی سطح میں ہر ایک جگہ میں ایک ذرہ پھستتا ہے اگر وہ جگہ اس سطح پر  
 ہو تو ہوں کہ وہ ایک جگہ سے ایک ہی سطح میں موجود ہوں تو ثابت کرو  
 کہ اس کے بعد ہر سطح میں وہ سب ذرے ایک ہی سطح میں موجود

ہونگے اور یہ بھی ثابت کر دے کہ ان سب ذروں سے گزرتا ہوا ایک دائرہ بنایا جاسکتا ہے

(۱۱) ایک جسم جس سمت الراس میں نیچے گرتے ہوئی دوسرے جسم چکر کو کھینچتا ہے جو کہ ایسی کی سطح پائل کے پانون میں رکھا ہوا جس کا طول اس اور ارتفاع اس سے اور اس کے ساتھ رسی سے بندھا ہوا ہے اور اس سطح مائل کے پانون سے اس سے اوپر کھینچتا ہے تو دریافت کر دے کہ جسم جس کو سطح مائل پر مقدار اٹھنے کے بعد اگر رسی کو کاٹ دیا جائے تو بھی وہ اس کی راس تک اٹھ سکے جواب (ج + ج)  $\times$   $\frac{1}{n+1}$  میل

(۱۲) ایک پھر کی پر گزرتی ہوئی رسی کے ہر دوسروں میں ۴ اونس اور ۵ اونس وزن کے دو جسم لٹکائے ہوئے ہیں۔ ابتدا سے ۳ سکند کے آخر میں ۵ اونس کا جسم کس قدر نیچے گرے گا۔

جواب تقریباً ۱۶ فٹ

(۱۳) پھر کی کے اوپر سے گزرنیوالی رسی کے دونوں سرے ۱۵ اور ۱۰ پونڈ وزن کے جسم سے لٹکتے ہیں۔ ابتدا سے ایک سکند کے بعد اس رسی کو کاٹ دیا گیا تو دوسرے سکند کے آخر میں ۱۰ پونڈ کے جسم کے سرعت کیا ہوگی

جواب  $\frac{1}{2}$  فٹ

(۱۴) کسی سطح مستوی پر ایک ۱۰ پونڈ کا جسم رکھا ہوا ہے اور دوسرا ایک پونڈ کے وزن کا جسم جو کہ جسم اول کے ساتھ رسی سے بندھا ہوا ہے سطح ماس میں گر کر اسے کھینچتا ہے تو ۴ سکند میں وہ کتنا فاصلہ طے کرے گا۔

جواب تقریباً ۱۶ فٹ

(۱۵) سطح افقی پر کسی ۱۰ پونڈ کے جسم پر ۵ پونڈ کی طاقت عمل کر کے کتنے وقت میں ۵ فٹ فاصلہ طے کرے گی اور اُس فاصلہ طے کرنے میں

اُس جسم کو کتنی سرعت حاصل ہوگی۔ جواب  $\frac{1}{2}$  اسیا۔

(۱۶) ایٹوڈ صاحب کے آلہ میں ہر دو ٹرے جسم ایک ایک پونڈ کی ہیں چھوٹا طویل جسم ۱۴ اور لمبا کسی تو ثابت کر دو کہ ابتداء سے ۴ سکینڈ کے انجام میں جسم کی سرعت محصلہ ہر سکینڈ میں ایک فٹ ہوگی۔

(۱۷) کوئی ذرہ کسی سطح مائل پر پھسلتا ہے اُس سطح کی بلندی ایک مقدار مستقل ہے تو ثابت کر دو کہ اُس کے پھسلنے کا وقت سطح کے میدان کے رقعہ کے متناسب ہے۔

(۱۸) کسی سطح راس پر دائرہ کے محیط میں ایسا ایک نقطہ معلوم کر دو کہ اُس نقطہ سے لے کر تک کسی ذرہ کے پھسلنے کا وقت اُس نقطہ سے دائرہ کے نقطہ بغل تک وتر پر پھسلنے کے وقت کے مساوی ہو۔

جواب دائرہ کے نقطہ اعلیٰ سے ۶۰ کے فاصلہ پر۔

(۱۹) سطح راس میں دائرہ کے محیط پر ایسا نقطہ دریافت کر دو کہ اگر اُس نقطہ پر اُس دائرہ کا محاسن کشیدہ نظر راس خارجہ سے ملا یا چاہی تو اُس محاسن پر کسی ذرہ کے پھسلنے کا وقت اُس قطر پر پھسلنے کے وقت کے مساوی ہو۔ جواب نقطہ اعلیٰ سے ۶۰ کے فاصلہ کو۔

(۲۰) ایٹوڈ صاحب کے آلہ میں جبکہ اجسام کی سرعت گ کے مساوی ہے رسی کو کاٹ دیا گیا تو اُس کے چورسہ حصے کے آخر میں رسی کے دو نوے ن سروں پر کے اجسام میں ملے دریافت کرو۔ جواب ۴ گ حصے

(۲۱) اُسی آلہ میں اگر اجسام کے مجموعہ کو مستقل رکھا جائے تو ثابت

کر دے کہ اس طرح کم ہونے سے رسی کی کشش بڑھ جاتی ہے۔

(۲۲) ۳۰ درجہ کے میلان کی سطح مائل پر ایک جسم ج رکھا ہو ہے اور ایک دوسرا جسم ج سطح مائل کی چوٹی پر پھر کی سے گدرتی ہوئی رسی سے بندھا ہوا ہے اور خود سمت راس میں گر کر جسم اول کو سطح مائل پر آ کر چھینچتا ہے اگر سطح مائل پر اس کا سطح  $\frac{1}{2}$  ہو تو ثابت کر دے کہ ج اور ج باہم مساوی ہوں گے۔

(۲۳) مثال بالا میں فرض کر دے کہ جس قدر وقت میں جسم ج جسم ج کو سطح مائل کے پائون سے چوٹی تک کھینچتا ہے اس سے دو چند وقت میں جسم ج جسم ج کو سطح مائل پر اسی قدر کھینچ سکتا ہو تو اجسام کی نسبت کو ثابت کر دے۔ جواب ۳ : ۲

(۲۴) ایک رسی کو مشین پر جو کسی سطح مائل کی چوٹی کی پہر کی ہو گدرتی ہو ایک طرف سات پونڈ اور دوسری طرف ۲۷ اور ۵ پونڈ وزن کر دو جسم بند ہو جو زمین جبکہ یہ پچھلے جسم ۱۲ فٹ نیچے گر چکی تھی تو ۲۷ پونڈ کے جسم کو عینہ کر لیا گیا تو معلوم کر دے کہ باقی ۵ پونڈ کا جسم چند نیچے ہو کر آسکے ہو جائیگا۔ جواب ۹ فٹ۔

(۲۵) اٹیوڈ صاحب کے آئینہ میں اگر پھر کی صرف رسی کو دو لون (اجسام) نصف وزن تک سہارا سکے تو ثابت کر دے کہ بڑا جسم چھوٹی جسم سے  $\frac{1}{2}$  (۲۶+۲۷) گنا سے کم نہ ہونا چاہیے۔

(۲۶) سطح راس میں کسی دائرہ کے محیط سے آگے کسی بیانی نقطہ تک جو کہ اس دائرہ نقطہ انفل سے نیچے واقع ہو خط بطی التمدید درپاٹ کر دے۔ جواب نقطہ معین اور دوسرا نقطہ انفل کو ملا کر خط کو محیط تک در اگر کر تو خط معلوم حاصل ہو گا۔

(۲۷) کسی دائرہ کے محیط سے بیرونی دائرہ تک خط طاس اول دائرہ

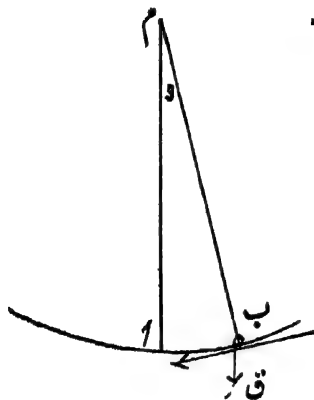
کے نقطہ آفل سے نیچے واقع ہر خط بطنی التزول دریافت کرو +  
 جواب۔ پہلے دائرہ کے نقطہ انفل اور دوسرے دائرہ کے  
 کہ نقطہ راس کے خط وصل کنندہ کو دونوں دائروں تک  
 بڑھا دیں تو خط مطلوب حاصل ہوگا +

# باب شہوان

## شا قول کے بیان میں

(۱۲۴) شا قول کے باب میں پوری پوری بحث اگلے ریاضی میں نہیں ہو سکتی  
 لہذا ہم صرف اُسکی بحث میں صیح صیح باتوں کا ذکر کر کے کفایت کرینگے۔  
 (۱۲۵) شا قول ایک جھوٹا وزن دار گیند ہوتا ہے جو کہ ایک پتلی و ناگیا تار  
 کے ایک سرے سے لٹکتا رہتا ہے۔ اور اُس تار کا دوسرا سر ایک کیل سے  
 بندھا ہوا ہوتا ہے۔ جب شا قول ساکن ہوتا ہے تو نارسمت اس میں قائم رہتی ہے  
 لیکن اگر اُسکو کچھ حرکت دیجاوے تو خطر اس کے دونوں طرف برابر حاصلوں پر  
 ہوتا رہتا ہے۔ اسکا باعث یہ ہے کہ جب شا قول خطر اس کی طرف لوٹ کر آتا ہے  
 اُس وقت اُسکی سرعت محض نقطہ اقصیٰ میں ہوتی ہے جو اُسکو خطر اس کی دونوں  
 طرف برابر فاصلہ پر لے جاتی ہے۔ اور اس طرح اُسکی حرکت خطر اس کے دونوں طرف  
 باری رہتی ہے۔ جب تک کہ اُسکو ہوا کی ٹھیک تار کی انتظامی اور نقطہ بندش پر  
 کیل پر ڈالنا وغیرہ اُسکو ہر ساکن نہیں کر دیتا۔ اگر کوئی اسے مذکورہ بالا موجد  
 نہیں تو ایک دفعہ شا قول کو حرکت دینے سے دوسرا تمام حرکت کرتا رہتا ہے۔

(۱۲۶) اگر کوئی شاقول خط راس کے ساتھ دو تین درجہ تک کا زاویہ بنا کر اُس کے دونوں طرف ہلتا رہے تو اُس کی ایک جنبش کا وقت دریافت کرو۔



تعریف۔ جو وقت شاقول کو خط راس کی ایک طرف کے فاصلہ علیا سے دوسری طرف کے فاصلہ علیا تک جانے میں صرف ہوتا ہے اُسکو شاقول کا عرصہ جنبش کہتے ہیں اور شاقول کے طول سے اُس تار کا طول مراد ہوتا ہے جس سے کہ وہ لٹکایا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ کوئی شاقول (۲) خط راس م ۲ کے دونوں طرف حرکت کرتا ہے اور کسی نقطہ میں مقام ب پر پہنچتا ہے اور فرض کرو کہ زاویہ  $\angle م ب = ۵$  جو موجب و جوی کے دو یالین درجہ سے زیادہ نہیں ہو تار م ۲ کا طول برابر تر کے ہے تو ظاہر ہوگا کہ ب مقام پر دو طاقین شاقول پر عمل کر رہی ہیں یعنی کشش ثقل اور کشش تار۔ کشش ثقل (ق) کو دو اجزا میں منقسم کر دو۔ ایک نقطہ ب کے محاس کے سمت میں اور دوسری اُسکی سمت عمود میں؟



اب واضح ہو گا کہ عمود ماس کی سمت کا جز منفصلہ  $\theta$  ہے

بیاض کشن تار کے زایل ہو جاتا ہے۔ اور ماس کے سمت کا جز منفصلہ ہی شانوار میں اسرارع پیدا کرتا ہے +

مگر چونکہ زاویہ  $\theta$  بہت چھوٹا ہے پس قطعہ دائرہ  $\theta$  نقطہ  $\theta$  کے ماس کے سمت ساتھ منطبق ہوتا ہے اور جب  $\theta = \theta$  اس سے ثابت ہوا کہ شاقول کے اسراع کی سمت ہر لحظہ میں نقطہ  $\theta$  کے سمت میں ہے اور یہ اسراع  $= ق جب \theta = \theta$  ہے۔  
 $\frac{ق}{\theta} = \frac{اب}{اس}$  مساوات سے ظاہر ہوتا ہے کہ شاقول کا اسراع کسی نقطہ پر قائم رہے اس کے فاصلہ کے متناسب ہے اس لئے اگر شاقول کا عرصہ جنبش  $\pi$  ہو تو جو حد  $\theta$  کے

$$\frac{ق}{\theta} = \left( \frac{\pi}{اس} \right) \therefore اس = \pi \frac{ق}{\theta}$$

مساوات مذکورہ بالا سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ہم زمین کے کسی مقام پر طول کے شاقول کی ایک جنبش کا عرصہ دریافت کر سکیں تو اس مقام کے کشش ثقل کی قیمت دریافت ہو سکتی ہے۔ مثلاً تجربہ سے معلوم ہوا کہ شہر لنڈن میں شاقول کا طول ۱۳۹۳ و ۳۹۵ انچ ہے ایک سیکنڈ میں ایک جنبش کرتا ہے۔ تو بموجب مساوات مذکورہ بالا کے اگر اس مقام کے کشش ثقل  $ق$  سے تعبیر کجائے تو

$$\pi = ۱$$

بق = ۲۶۸ = ۳۸۶۶۲۸ انچہ فی سکند

= ۳۲۶۱۹ فٹ فی سکند

(۱۲۷) جو شاقول ایک سیکنڈ میں ایک دفعہ جھین کرتا ہے اُسکو سیکنڈ شاقول کہتے ہیں۔ سیکنڈ شاقول کا طول زمین کے مختلف ارتفاع پر مختلف ہوتا ہے کیونکہ کشش ثقل کی قیمت مختلف ہوتی ہے۔

(۱۲۸) شاقول کے مشاہدہ سے پہاڑ وغیرہ کی اونچائی دریافت ہو سکتی ہے (مثال)

مثلاً اگر مشاہدہ سے معلوم ہو کہ کسی پہاڑ پر سیکنڈ شاقول سن سیکنڈ میں ایک دفعہ جھین کرتا ہے تو اس پہاڑ کی اونچائی کیا ہوگی۔

جواب کہ وہ پہاڑ کی اونچائی ۴ فٹ ہے اور زمین کا نصف قطر ۴ فٹ ہے۔ اور پہاڑ کے اوپر کشش ثقل کی قیمت ۴ ہے۔

$$تو ۱ = \frac{۱}{۱}$$

$$س = \frac{۱}{۱}$$

$$\frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱}$$

$$\frac{ق}{ن} = \frac{۲}{۲(ن + ۱)} \quad (دیکھو دفعہ ۱۰۳)$$

تین

$$\therefore \text{س} = \frac{\text{ن} + \text{ف}}{\text{ن}} \text{ یعنی ف} = (\text{س} - ۱) \times \text{ن}$$

(۱۲۹) - اگر کسی معین طول کا ثاقول کسی عرصہ معین میں زمین پر دہ دفعہ جنبش کرے اور کسی پہاڑ کے اوپر دہ دفعہ جنبش کرے تو پہاڑ کی اونچائی دریافت کرو +

اس سوال میں زمین پر ثاقول کی ایک جنبش کا عرصہ =  $\frac{\text{س}}{\text{د}}$  اور پہاڑ پر ایک جنبش کا عرصہ =  $\frac{\text{س}}{\text{د}}$

$$\therefore \frac{\text{س}}{\text{د}} = \frac{\text{س}}{\text{د}} \times \frac{\text{ن}}{\text{ن}}$$

$$\text{و} \quad \frac{\text{س}}{\text{د}} = \frac{\text{س}}{\text{د}} \times \frac{\text{ن}}{\text{ن}}$$

$$\therefore \frac{\text{س}}{\text{د}} = \frac{\text{س}}{\text{د}} \times \frac{\text{ن}}{\text{ن}} = \frac{\text{ن} + \text{ف}}{\text{ن}} = ۱ + \frac{\text{ف}}{\text{ن}}$$

$$\therefore \frac{\text{د} - \text{د}}{\text{د}} = ۱ - \frac{۱}{۱ + \frac{\text{ف}}{\text{ن}}} = ۱ - (۱ + \frac{\text{ف}}{\text{ن}})^{-۱}$$

$\frac{\text{ف}}{\text{ن}} =$  تقریباً کیونکہ ف نہایت کم ہے بمقابلہ ن کے

$$\therefore \text{ف} = \frac{\text{د} - \text{د}}{\text{د}} \times \text{ن}$$

# مثال

فرض کرو کہ پہاڑ کی اونچائی ایک میل ہے اور زمین کا نصف قطر ۳۰۰۰ میل  
یہاں تا قول اُس پہاڑ پر ۲۴ گھنٹہ میں سطح زمین کی نسبت کتنی دفعہ کم جنبش کرے گا  
اسیجگہ بموجب مساوات مذکورہ بالا کے

$$\frac{1}{3000} = \frac{d - d}{60 \times 60 \times 2200}$$

$$d - d = 2154 \text{ تقریباً}$$

یعنی تا قول پہاڑ پر بہ نسبت سطح زمین کے ۲۴ گھنٹہ میں تقریباً ۲۲ دفعہ کم جنبش  
کرے گا۔

## مثالات باب سیر دہم

(۱) دو مقاموں پر کشش ثقل کی قیمت ق اور ق ہے اور ایک تا قول ان مقاموں پر  
ایک عرصہ معین میں د اور د دفعہ جدا گانہ جنبش کرتا ہے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{Q - Q}{Q} = \frac{2 (D - D)}{D} \text{ تقریباً}$$

(۲) ایک تا قول شہر لندن میں ۲۴ گھنٹہ کے عرصہ میں ۵۶۴۲۵۹۹۴ دفعہ  
جنبش کرتا ہے اور وہی تا قول شہر پیرس میں اسی عرصہ میں ۵۵۹۳۴۴۸۳  
دفعہ جنبش کرتا ہے تو ان دو شہروں میں اکائی حجم کے وزن کا فرق معلوم کرو۔

جواب ۳۹۰

(۳) دو شاقولوں کا طول جدا گانہ ۳ اور ۳ ہے جہاں کہہ ۱ اور ۳ کا فرق بہت کم ہے۔ اور کسی مقام پر ان کی ایک جنبش کا وقت جدا گانہ ۳ و ۳ ہے

$$\text{تو ثابت کرو کہ } \frac{3-3}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{3-3}{3}$$

(۴) کوئی گھرنی ۲۴ گھنٹہ میں بمقدار ۲ منٹ پیچھے ہو جاتی ہے اس کے شاقول کے نیچے ایک پیچ لگا ہوا ہے جسکے گھمانے سے اس کا طول کم زیادہ ہو سکتا ہے۔ اس پیچ کے ایک انچ لمبائی میں ۵۰ بل ہیں تو معلوم کرو کہ اس گھڑی کو درست کرنے کے لئے اس پیچ کو کتنی دفعہ گھمانا چاہئے۔

فرض کرو کہ اس مقام پر سیکنڈ شاقول کا طول ۳۹،۲۴ انچ ہے \*

جواب ۵،۴

(۵) معلوم ہوا کہ زمین کا حجم چاند کے حجم کی نسبت ۹ گنا بڑا ہے اور زمین کا قطر چاند کے قطر کی نسبت ۴ گنا بڑا ہے تو دریافت کرو کہ اگر زمین پر کے ایک سیکنڈ شاقول کو چاند پر لجا دیں تو وہ ان اسکی ایک جنبش کا عرصہ کیا ہوگا \*

جواب ۳۱ سیکنڈ

(۶) کسی مقام پر ایک سیکنڈ شاقول ۲۴ گھنٹہ میں ۱۲۰ دفعہ زیادہ جنبش کرتا ہے تو اس مقام پر کشش ثقل کی قیمت دریافت کرو \*

(۷) کسی مقام پر سیکنڈ شاقول کا طول ۳ ہے۔ دو اور شاقولوں کا طول (۱) ۳ (۲) ۴ ہے جہاں ۳ کی قیمت بہت کم ہے تو ثابت کرو کہ ۲ گھنٹہ میں

ان دو شاقولوں کی تعداد جنبش کا مجموعہ

$$= \text{تقریباً } 2 \times 22 \times (40) \times (1 + \frac{3}{2})$$

(۸) معلوم ہوا کہ ایک شاقول کسی مقام پر ایک معین وقت میں ۵ دفعہ جنبش کرتا ہے۔ اور ایک اور مقام پر اسی عرصہ میں ۵ دفعہ۔ تو ثابت کرو کہ اگر اول مقام پر کوئی رستی کسی مادہ کے  $\frac{1}{3}$  کعب انچون کا وزن سہار سکے تو دوسرے مقام پر وہی رستی مادہ کے  $\frac{1}{3}$  کعب انچون کے وزن کو سہار سکے گی \*



# چودھواں باب

مقذوفات کے بیان میں

(۱۳۰) سمت الراس میں مقذوفات کی حرکت کا ذکر مختصر طور پر تیسرے باب میں ہو چکا ہے اسباب میں عموماً ایسی حالتوں کا بیان ہو گا جن میں سمت خذف سطح اقطنی کے ساتھ کوئی زاویہ بناتی ہو۔ مقذوفات کی حرکت کا پورا پورا حال بیان کرنا بہت ادق ہے اور علم کلیات سے تعلق رکھتا ہے کیونکہ اُس میں مندرجہ ذیل مقدار ہائے غیر معین واقع ہوتے ہیں۔ (۱) مقذوف کی حرکت (دوری ۲) کشش ثقل کا اختلاف جو کہ مقذوف کے ہر نقطہ مختلف ارتفاعوں پر پہنچنے سے واقع ہوتا ہے (۳) مقذوف کے عرصہ حرکت میں زمین کی گردش دوری و گردش شمسی۔ (۴) ہوا کی تحلیک جو کہ مقذوف کی سرعت کے مجذور کے متناسب بڑھتی جاتی ہے وغیرہ +

ان میں سے اول تین غیر معین مقداروں کا اثر مقذوف کی حرکت پر بہ نسبت چوتھے کے کم ہوتا ہے پس ان کو شمار میں نہ لانے سے کم غلطی واقع ہوگی مگر ہوا کی تحلیک کا اثر اس قدر زیادہ ہوتا ہے کہ اُس کو حساب میں نہ لانے سے بہت غلطی واقع ہوگی۔ ڈاکٹر ٹاٹن صاحب اور دیگر حکماء نے بدوق و توپ کے گولہ کی حرکت کے تجربوں سے دریافت کیا ہے کہ ہوا کی تحلیک مقذوف کی سرعت کے مجذور کے متناسب بدلتی رہتی ہے۔ پس جب مقذوف کی سرعت بہت زیادہ ہو تو





نقطہ ب سے دو خطوط بان و بام متوازی سمت راس و سمت قذف کے کہیں چوں۔  
 ہو جب دو سر قانون حرکت کے ہم قیاس کر سکتے ہیں کہ ذرہ نے سرعت گ کے  
 ساتھ ص وقت میں بان فاصلہ طے کیا اور باعث کثرت نقل کے اُسی عرصہ میں  
 بان ب کا جگہ کی طرف گرا۔

$$\text{بان} = \text{بام} = \text{گ ص} \dots \dots (۱)$$

$$\text{بان} = \text{م} = \frac{۱}{۲} \text{ق ص} \dots \dots (۲)$$

$$\text{م} = \frac{۱}{۲} \text{ق} = \frac{۱}{۲} \text{بام} \times \text{ق}$$

$$\text{بام} = \frac{۲}{ق} \text{گ} = \frac{۲}{ق} \text{م} \times \dots \dots (۳)$$

اگر ہم بان محور فرض کئے جاویں۔ تو ہم اور بان نقطہ ب کے محو میں  
 ہونگے۔

سادات نمبر ۳ وقت ص پر منحصر نہیں ہے۔ یعنی حرکت کے ہر لمحہ کے لئے درست ہے  
 اس لئے یہ سادات ج کے تمام انقاط کو تعبیر کرتی ہے۔ علم ہندسہ بالجبر میں ثابت  
 ہے کہ یہ تمام انقاط ایک خاص خط منحنی ہوتا ہے جسکو پیرایہ کہتے ہیں۔ اور چونکہ  
 ایسے مقدمات کی حرکت جو سطح افقی سے کسی میدان پر محذوف ہوں اس خط  
 منحنی میں ہوتی ہے اس واسطے اسکو طریق القذف بھی کہتے ہیں۔ علم ہندسہ بالجبر میں یہی

بعض مصنفوں نے اپنی کتاب میں اسکا نام قریب البینوی رکھا ہے نیز گری  
 نام ہی استعمال کیا ہے۔

نمات ہے کہ مسادات نمبر (۳) سے تعبیر شدہ پیرابولا کا محور خط سمت الراس میں ہوتا ہے اور خط  $\alpha\alpha$  م اس پیرابولا کا نقطہ  $\alpha$  سے گزرتا ہوا قطر ہے۔ اور نقطہ  $\alpha$  سے اس کے نقطہ ماسکہ  $\alpha$  کا فاصلہ مساوی ہے  $\frac{2}{\sin \theta}$  کے +

(۱۳۲) طریق المقنن کے نقطہ ماسکہ کا مقام حسب ذیل معلوم ہو سکتا ہے۔

فرض کرو کہ سمت قذف کا میلان سطح افقی سے  $\theta$  ہے اور زاویہ  $\alpha$  ل

برابر ہو چکی ہے۔ تو بموجب اصولات پیرابولا کے ظاہر ہے کہ

خط  $\alpha\alpha$  جو نقطہ  $\alpha$  پر ماس ہے خطوط  $\alpha\alpha$  اور  $\alpha\alpha$  کے درمیانی زاویہ کی تقصیف کرتا ہے +

$$90^\circ = \theta + (\theta - \alpha) 2 \quad \therefore$$

$$\therefore \theta = \alpha 2 - 90^\circ \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{اور } \alpha\alpha = \frac{2}{\sin \theta} \dots \dots \dots (2)$$

ان دو مساداتوں سے نقطہ  $\alpha$  کا مقام معلوم ہو سکتا ہے۔

واضح ہو کہ اگر  $\theta$  بڑا ہو  $\theta$  سے تو نقطہ ماسکہ سطح افقی  $\alpha\alpha$  کے

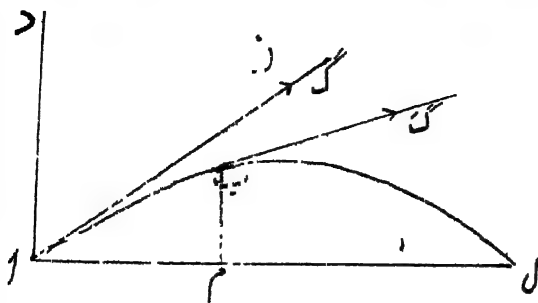
نیچے واقع ہو گا +

(۱۳۳) مقنن کا مقام انقاط اور اس کی حرکت کی تفصیل خط افقی  $\alpha\alpha$  اور خط راس

$\alpha\alpha$  کو محور فرض کرنے سے بھی وہ یافت ہو سکتی ہیں +

فرض کرو کہ ص وقت کے انجام میں مقنن کا مقام  $\alpha$  پر پہنچا ہے

نقطہ  $\alpha$  سے  $\alpha\alpha$  عمود  $\alpha\alpha$  پر گھٹنچہ تو  $\alpha\alpha$  اور  $\alpha\alpha$  نقطہ  $\alpha$  کی محدبین ہو چکی



فرض کر کہ  $\alpha = \text{ل اور ب} = \text{د}$

مقدوف کی سرعت ابتدائی گ کو متوازی  $\text{ب}$  اور  $\alpha$  کے منفصل کرو تو ظاہر ہے کہ کشش ثقل سمت الہاس کی خبر منقصہ مخالف عمل کرتی ہے۔ اور مقدوف کی حرکت  $\alpha$  اور  $\alpha$  کی سمتوں میں ایک دوسرے بالکل علحدہ فرض کیجا سکتی ہے

$$\text{اس لئے } \alpha = \text{ل} = \text{گ جب } \alpha \times \text{ص} \dots \dots (۱)$$

$$\text{بم} = \text{د} = \text{گ جب } \alpha \times \text{ص} - \frac{1}{2} \text{ق ص} \dots (۲)$$

$$\text{د} = \text{ل} \times \text{ص} - \frac{\text{ق ل}}{\alpha \text{ جب } \alpha} \dots \dots (۳)$$

سادات نمبر ۳ مقدوف کی مقام النقطہ کو تعبیر کرتی ہے۔ اور مساواتوں نمبر (۱) اور

(۲) سے مقدوف کا مقام کسی معین وقت کے انجام میں دریافت ہو سکتا ہے۔

اگر مقام  $\text{ب}$  پر مقدوف کی سرعت  $\text{گ}$  ہو اور اس کی سمت محور  $\alpha$  سے زاویہ  $\phi$  بنادے

تو چونکہ مقام  $\text{ب}$  پر مقدوف کی سرعت کے اجزا منقسم متوازی محوروں کے جدا گانہ

$$\text{گ جب } \alpha - \text{ق ص ہیں}$$

$$\text{گ بم } \phi = \text{گ جب } \alpha$$

ر گ جب  $\phi$  = گ جب  $a$  - ق ص

گ ۱ = گ ۲ - ۲ ق ص گ جب  $a$  + ق ص ..... (۱)

د س  $\phi$  = گ جب  $a$  - ق ص ..... (۲)

ان دو مساواتوں سے مقام قبا پر ذرہ کی سرعت اور سمت حرکت دریافت ہو سکتی ہے اور حد ۲ کی مانند ایک جگہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ مقذوف کے ارتفاع اعظم پر یعنی پیرابولا کے نقطہ براس تک پہنچنے میں گ جب  $a$  وقت صرف ہوگا اور اس مقام کی بلندی سطح افقی سے مساوی گ جب  $a$  کے ہے۔

(۱۳۷) فرض کر دو کہ مقذوف سطح افقی کو نقطہ ل پر قطع کرتا ہے تو فاصلہ آگ کو سطح افقی پر مقذوف کی وسعت کہتے ہیں اور قبل وقت ابتدا سے قذف ہونے اس مقام تک پہنچنے میں صرف ہوتا ہے اس کو مقذوف کا وقت تاخت کہتے ہیں فرض کر دو کہ مقذوف کی وسعت سطح زمین پر ہے اور وقت تاخت سے ہے تو بموجب حد مذکورہ بالا کے

و = گ جب  $a$  × ت

اور ۰ = گ جب  $a$  × ت - اوقات

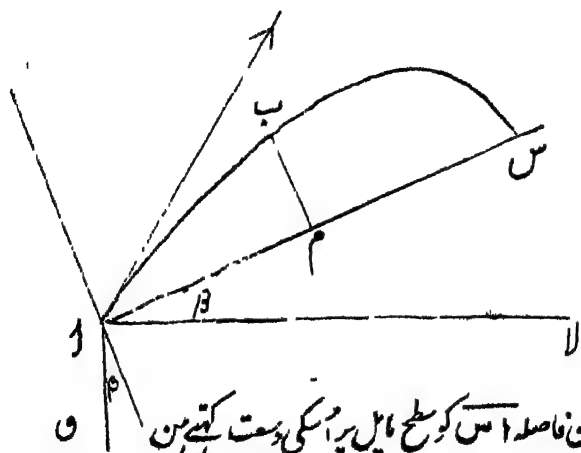
ت = ..... (۱)

اور ..... (۲)

داخل ہو کر جب مقذوف نقطہ ۲ پر تھا یعنی لحظہ قذف میں ت برابر صفر کے تھی کیونکہ ان  
تعام پر بھی ان کی قیمت برابر صفر کے ہے۔

ساوات بالا میں  $\omega$  کی قیمت سے ظاہر ہوتا ہے کہ اگر مقذوف کی سرعت قذف  
منتظیم رہے اور میلان قذف مختلف یا جاوے تو اس میلان کو  $\theta$  ہم لینے سے  
 $\omega$  کی قیمت اعظم ہوگی۔

(۱۳۵) فرض کرو کہ  $\omega$  اس ایک سطح مایل ہے جو سطح افقی سے زاویہ  $\beta$  بنا کر ہے  
اور کوئی مقذوف اس سطح کے تمام سے پر اگر گرا



احالت میں فاصلہ  $\omega$  اس کو سطح مایل پر ان کی سرعت کہتے ہیں  
یہ سرعت اور حالت کا وقت تاخت حسب ذیل دریافت ہوتے ہیں۔

نقطہ آ سے سطح مائل پر شود  $\omega$  نکالو اور  $\omega$  اس اور  $\omega$  کو نوٹ لیں اور ان کی سرعت  
وقت ص کے انجام میں مقذوف نقطہ ج پر پہنچا ہے اور  $\omega$  اس اور  $\omega$  اس  
کی محد دین ہیں تو اگر مقذوف کی سرعت گ اور اسراع کش ثقل  $g$  کو غور و

کے متوازی منسل کیا جاوے۔ تو مانند بحث دفعہ ۳۳ کے ظاہر ہوگا کہ

۱۲ = گ جم رہ (م - ص) - ۱ ق جب ہو ..... (۱)

اور ب م = گ جب (د - م) ص - ۱ ق جم ہو ص ..... (۲)

پس اگر مقذوف کو نقطہ س پر پہنچنے میں وقت صرف ہوا ہو تو

۱ س = گ جم (د - م) ت - ۱ ق جب ہو ت

اور ۰ = گ جب (د - م) ت - ۱ ق جم ہو ت

ت = گ جب (د - م)  
ق جم ہو

اور اس = گ جب (د - م) جم د  
ق جم ہو

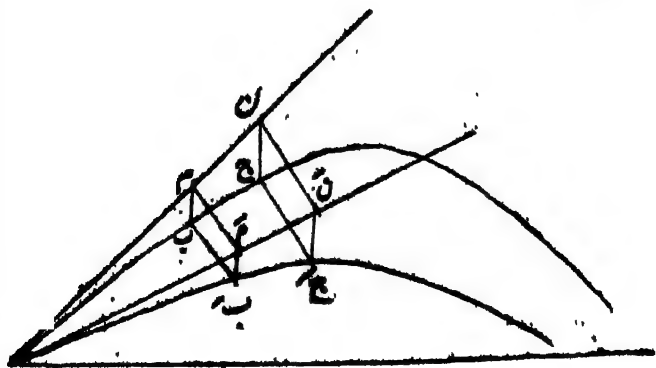
(۱۳۴) چونکہ اس = گ جب (د - م) جم د  
ق جم ہو

$$= \frac{گ^۲}{ق جم جم} \times \{ جب (۲ - ۵ - ۵) - جب جم \}$$

اس لئے اگر  $۲ - ۵ - ۵ = ۹۰$  یعنی اگر  $۵ = ۹۰ + ۵$  ہو  
تو اس کی قیمت اعظم ہوگی اور اس وسعت اعظم کی قیمت اس  
حالت میں

$$= \frac{گ^۲}{ق (۱ + جب جم)} = \frac{گ^۲ (۱ - جب جم)}{ق جم جم}$$

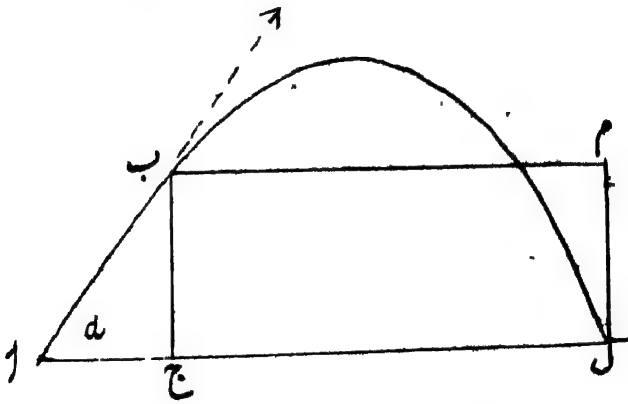
(۱۳) جب دو اجسام ایک ہی مقام سے مختلف سرعتوں کے ساتھ  
مختلف سمتوں میں متغذوف ہوں تو ان کا خط وصل کبھی ہمیشہ اپنے  
متوازی رہے گا۔







حرکت کرتا (دیکھو مدہ ۹) اور اگر دو نقطہ صرف اسراع کشش ثقل  
 ق سے نیچے گرتے تو انکامرکز ثقل بھی اسراع ق سے ایک خط مستقیم میں نیچے  
 گرتا۔ پس ہم فرض کر سکتے ہیں کہ مقذوف کے مرکز ثقل دو حرکتیں ایک  
 ہی وقت میں موجود ہیں اول سرعت کیساں جو بہ سبب سرعت ہائے قذوف کے پیدا ہوتی  
 ہے اور دوسرا اسراع کیساں ق جو بہ سبب کشش ثقل کے پیدا ہوتا ہے اسلئے  
 حد ۱۳ کی مانند اچکھ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ مرکز ثقل کو حرکت پڑا بولا میں ہوگی \*



(۱۳۹) جب کوئی ذرہ سطح مایل پر ایسی سرعت میں سے مقذوف ہو کہ سطح مایل کے پاس  
 تک پہنچنے کے بعد بھی حرکت کرنا رہے تو اسکی حرکت بعد میں پیرابولائین ہوگی شکل  
 مذکورہ بالا ہے ذرہ کی حرکت کا حال بخوبی واضح ہو جائیگا \*  
 سطح مایل کے راس تک پہنچنے میں ذرہ کی سرعت محصلہ ہوگی اسکو ذرہ کی حرکت بعد  
 کے سرعت قذوف سمجھنی چاہیئے \*

اگر ذرہ اس سطح افقی کو نقطہ زمین سے گزرتی ہے تو اسے تمام پر آکر قطع کرے

تو بموجب مساوات خط ۳۴ کے نقطہ ل کے محد دین م ب و م ل دریافت ہو سکتی  
ہیں اگر یاد رکھنا چاہئے کہ اس حالت میں ل کامعین ل م مقدار نصفی ہو گا کیونکہ وہ محور  
ب م کے نیچے واقع ہوتا ہے +  
جب کوئی جسم کسی مینار وغیرہ کی چوٹی سے سمت ی ایل میں متذوف ہو تو اسکی حرکت کے  
دریافت کرنے کے لئے بحث مذکور ہوا لامل میں آو گی +

### تمثیلات باب چہار دہم

(۱) کسی ذرہ کی سرعت کی اجزاء منفصلہ متوازی دو معین محوروں کے اسراع  
کیاں سے بدلتے ہیں تو ثابت کر دو کہ ذرہ کی حرکت پیرا بولایمین ہوگی اگرچہ اجزاء  
منفصلہ اس اسراع کے ہمیشہ متناسب رہیں تو اس صورت میں ذرہ کی حرکت  
خط مستقیم میں ہوگی +

(۲) کسی ایک مقام سے دو اجسام ایک ہی سرعت کے ساتھ متذوف ہوں گے اور  
انکی زوایا میلان کا مجموعہ برابر ہوگا جسکے نتیجے میں ثابت کر دو کہ ان دونوں کی سرعت  
سطح افقی پر ایک ہی ہوگی +

(۳) اگر ایک ہی نقطہ میں ایک ہی مقام سے دو ایک ہی سرعت کے ساتھ گئی ایک  
اجسام متذوف ہوں تو وہی سمت اپنی حرکت کے ہر نقطہ میں ایک گری کی سطح پر  
رہیں گے +

(۴) ایک ذم کے سطح ی ایل کے پاؤں سے سرعت گ کے ساتھ کوئی ذرہ اس پر  
متذوف ہوا جب ذرہ سطح کے نقطہ راس پر پہنچے تو اسکی سرعت نصف

کی چٹھی تو سطح مائل کے نقطہ میل سے اُس نقطہ کا فاصلہ جہاں وہ سطح افقی کو آکر  
قطع کرتا ہے دریافت کرو +

جواب  $\frac{۱۶ گ}{۲۵ ق}$  فٹ

(۵) ایک سطح مائل کا میلان ۱۵ ہے تو کوئی ذرہ اُس سطح میں کتنے میلان پر تھزون  
ہوتا کہ اُس سطح پر گرنے کے وقت اُسکی سمت حرکت سطح سے زاویہ قائمہ بناوے  
جواب مس (۱)  $\frac{۱}{۲}$  جم ۵

(۶) سطح راس میں ایک مثلث واقع ہے جسکا قاعدہ خط افقی میں ہے اور  
قاعیدہ یکے زاویے ۹۰ درجہ ہیں اُسکے قاعدہ کے ایک سرے سے کوئی ذرہ  
اسطح سے تھزون ہو کہ وہ عین اُس مثلث کے نقطہ راس کو مس کر کے قاعدہ  
کے دوسرے سرے پر جا کر اگر میلان تھزون ۵ ہو تو ثابت کرو کہ

مس ۵ = مس ۱۵

(۷) کوئی ذرہ سرعت ۳۰ ق کے ساتھ ۵ کے میلان سے تھزون ہوا تو اُسکی  
دست سطح افقی پر دریافت کرو +

جواب  $\frac{۹ ق}{۲}$

(۸) اگر کمی تھزون کے نقطہ ارتفاع اعظم پر اُسکی سرعت کی مقدار بدل دیا جائے  
مگر سمت سرعت بدستور رہے تو دریافت کرو کہ آیا اُسکا وقت تاخیر میں ملحق  
ہوے گا یا نہیں +

جواب نہیں

(۹) دو جسم ایک ہی نقطہ میں کسی نقطہ سے مختلف میلانوں پر مختلف سرعتوں کے ساتھ متذوف ہوئی تو کسی وقت معین کے بعد ان کے درمیان فاصلہ کیا ہوگا +  
 (۱۰) کسی جہاز میں جبکی سرعت حرکت گ ہے ایک توپ سے میلان  $d$  کے ساتھ ایک گولہ سرعت گ کے ساتھ چلایا گیا جہاز اور گولہ ایک ہی سطح راس میں حرکت کرتے ہیں۔ تو گولہ کی وسعت دریافت کرو +

جواب -  $\frac{2g \sin d}{\sin^2 d} \times (g + g \sin d)$

(۱۱) ثابت کرو کہ کسی  $\theta$  کی سطح پائل پر متذوف کی وسعت سطح افقی پر کی وسعت کے  $\frac{1}{2}$  کے برابر ہے +

(۱۲) کوئی جسم جو کہ میلان  $d$  کے ساتھ سرعت گ سے متذوف ہوا ایک دیوار کی چوٹی کو مس کر کے چلا گیا۔ اس دیوار کی ارتفاع کا زاویہ مقابل نقطہ قذف کے  $\theta$  ہے تو دریافت کرو کہ متذوف کو ابتدا سے دیوار کی چوٹی تک پہنچنے میں کتنا وقت صرف ہوا ہوگا -

جواب  $\frac{2g \sin d}{\sin^2 d} (\beta - \alpha)$

(۱۳) کسی مینار کی چوٹی سے ایک پتھر معین میلان سے متذوف ہوا تو سرعت قذف کیا ہونی چاہیے تاکہ سطح افقی کے ایک نقطہ معین پر آکر گرے +

(۱۴) دو پتھر ایک ہی نقطہ میں ایک سطح راس میں سرعتوں گ و گ کے ساتھ اور جدا گانہ میلان  $d$  و  $\beta$  سے متذوف ہوئے تو ثابت کرو کہ گ  $\frac{2g \sin d}{\sin^2 d}$  (جواب)

وقت کے انجام میں انکی سمت حرکت ایک دوسرے کے متوازی ہوگی +  
 (۱۵) ق (گ جسم  $\beta$  - گ جسم  $d$ )

(۱۵) کوئی ذرہ میلان  $d$  سے متذوف ہوا تو دریافت کر دے کہ کتنے وقت کے انجام میں اس کی سمت حرکت  $B$  میلان کی ایک سطح پائل کے ساتھ زاویہ قائمہ بنا دیگی +

جواب  $\frac{1}{C} \times (ms \pm d \text{ جم } B)$

(۱۶) ایک جسم جو سرعت  $g$  کے ساتھ متذوف ہو  $B$  میلان کی ایک سطح پائل پر جو کہ نقطہ حد میں سے گذرتی ہے زاویہ قائمہ بنا کر اگر اتنا ثابت کر دے کہ سطح زمین سے اس نقطہ کی بلندی جیسے کہ متذوف  $A$  کر گرا برابر  $\frac{2g}{C} \times \frac{B}{B+1}$  کے ہے (۱۷) ایک توپ کا گولہ سرعت  $g$  سے  $d$  میلان کے ساتھ چلا۔ اور بوقت قدف توپ اپنی نالی میں سے گذرتی ہوئی سطح  $A$  کے ساتھ زاویہ  $B$  بنا کر سرعت  $g$  سے متحرک تھی تو گولے کی وسعت سطح زمین پر دریافت کرو +

جواب  $\frac{2g \text{ جب } d}{C} \text{ ہاگ } 1 + g \text{ جم } d + 2g \text{ جم } d \times \text{جم } B$

(۱۸) ایک پتھر اس طرح سے متذوف ہوا کہ ایک درخت کی چوٹی پر ایک چڑیا گھنے کے بعد اتنا اونچا جاسکے کہ اس کی گل اونچائی سطح افقی سے برابر دو چند اونچائی درخت کے ہو۔ بوقت قدف پڑیا سطح افقی کے متوازی اُڑے گی۔ تو ثابت کر دے کہ اگر متذوف کی سرعت کا جز منفصلہ متوازی سطح مستوی کی چڑیا کی سرعت کے ساتھ ایسی نسبت رکھے جیسا کہ  $1 + 2 : 2$  تو پتھر ضرور گرے گا +

(۱۹) کوئی جسم میلان  $d$  کے ساتھ سرعت  $g$  سے متذوف ہوا۔ سطح افقی پر پہنچتا ہے

سکے و مسرت کے نقطہ تصنیف سے ایک سطح بائبل ۵ میلان کی گذرتی ہے تو دریافت کر دیکھتہ ذوف کو ابتدا سے سطح بائبل تک پہنچنے میں کتنا وقت لگے گا ؟

$$\text{جواب} \frac{\text{گ جب ۵}}{\text{ق}} \times ۲۵$$

(۲۰) ۵ فٹ ارتفاع کے ایک مینار کی چوٹی سے ایک جسم ایسی سرعت سے تھڑوٹا ہوا کہ اگر وہ مینار کی ت کتنا اونچائی سے نیچے گرے گا تو اسکی سرعت محصلہ زمین پر پہنچنے کے وقت برابر سرعت قذف کی ہوتی تو دریافت کر دیکھتہ ذوف کی وسعت اعظم سطح زمین پر کیا ہوگی۔ اور نیز یہ بھی ثابت کر دو کہ وسعت اعظم حاصل کرنے کے لئے جسم کو ایسے زاویہ میلان سے تھڑوٹا ہونا چاہئے کہ جبکہ مس = ۵۱ + ۱۱ کے ہو

$$\text{جواب} ۵۲ \text{ م } ۱۱ + ۲۵$$

## باب پنذرھواں

اجسام کے مضاربہ کے بیان میں

(۱۴۰) اس مقام تک ہم نے صرف مستقل طاقتوں کے عمل کا ذکر کیا ہے۔ اب ہم ہر تبدیلی کا ذکر کریں گے جو کہ درخیز اجسام کے ضرب یا کسی سے انکی حرکت میں پیدا ہوتی ہے۔ جس طرح کہ ہم نے اگلے بابوں میں فرض کیا تھا اسی طرح ہم اس باب میں جسے فرض کریں گے کہ اجسام میں کوئی حرکت مدور یعنی واقع نہیں ہوگی اور وہ ظاہر میں حرکت کر گئے ہیں \*

(۱۴۱) یہ بات بیان ہے کہ جب دو جسم ایک دوسرے کے ساتھ ٹکرائیں تو ان دونوں کی حرکت میں تبدیلی واقع ہوتی ہے۔ یہ تبدیلی ضرور کسی طاقت کے عمل سے پیدا ہوئی ہوگی۔ مگر کوئی شے از خود کسی طاقت کی بانی نہیں ہے جس قوتہ حرکت کے ساتھ ایک جسم ضرب کے لحاظ میں حرکت کر رہا ہو اسی قوتہ حرکت کا کوئی جزو تبدیلی نہ کر سکتا بلکہ وہ ایک ہی ہے یعنی جس قوتہ حرکت یا باعث ضرب ایک جسم کی کم ہو جاتی ہے اتنی ہی دوسرے جسم کی قوتہ حرکت بڑھ جاتی ہے۔ اس لئے ضرب کے بیشتر مجموعہ دونوں متحرک جسموں کی تو ایسا حرکت کا بعد ضرب کے بھی ان قوتوں کا مجموعہ وہی رہتا ہے۔ یہ نتیجہ حرکت کے تیس قانونوں سے بھی ظاہر ہے کہ چونکہ ضرب کے لحاظ میں دونوں جسموں کے عمل یا بھی مضاربہ میں مساوی اور سمت میں ایک دوسرے کے مخالف ہوتا ہے۔ اس لئے انکی عمل یا بھی سے جو تبدیلیں دونوں جسموں کی قوتہ حرکت میں پیدا ہوتی ہیں

میں وہ بھی مساوی ہیں +

(۱۴۲) دنیا کے کل اجسام کی مقدار لائیں یا سائڈز میں لینے اُن سب کے حجم طاقتوں کے عمل سے دباے جاسکتے ہیں۔ اور جب وہ طاقتیں ہٹائی جاویں تو اجسام اپنی سابقہ حجم حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔ اس کوشش میں بعض اجسام زیادہ کامیاب ہوتے ہیں اور بعض کم دباؤ کے بعد اجسام کی اپنے حجم سابقہ حاصل کرنے کی قابلیت کو لاسیطقی کہتے ہیں۔ یہ لاسیطقی کسی جسم میں پورے پورے نہیں پائی جاتے۔ مگر کئی مادے مثلاً لاطھی دانت وغیرہ ایسے ہیں کہ جس میں قریباً پوری لاسیطقی موجود ہے۔ اسی لاسیطقی باعث سے مضاربہ کے بعد اجسام کی حرکت میں تبدیلی واقع ہوتی ہے

بعض سہولیت ہم فرض کریں گے کہ اجسام مضاربہ ایک ہی قسم کے گینے ہوئے ہیں اور گیند کی طرح گول ہیں +

(۱۴۳) فرض کر دو کہ دو گیند جو ایک ہی خط میں متحرک تھیں حالت مضاربہ میں آئے اگرچہ انکا عرصہ مضاربہ نہایت قلیل ہو گا تو کہ ایک سیکنڈ کے سو میں حصہ سے بھی کم مگر طاقت مضاربہ استفادہ زیادہ ہوتی ہے کہ اس عرصہ قلیل میں بھی گیندوں کی حرکت میں بہت تبدیلی پیدا کرتی ہے۔ فرض کر کہ عرصہ مضاربہ دو حصوں میں منقسم کیا گیا نصف اول میں اجسام کے قبضے اجزاء ایک دوسرے سے ٹکرا کھاتے ہیں دب جاتے ہیں۔ اور رفتہ رفتہ انکا باہمی دبا بڑھتا جاتا ہے اور اس حصہ کے انجام میں دونوں اجسام ایک لفظ کے واسطے گویا متحد ہو کر ایک ہی سرعت کے ساتھ حرکت کرنے لگیں گی۔ دوسرے حصہ وقت میں دونوں اجسام باعث لاسیطقی کے



اپنے ساتھ جسم کی حامل کرنے کی کوشش میں ایک دوسرے کے برعکس عمل کرنے  
 جس کے سبب وہ خود ایک دوسرے سے علیحدہ ہو کر مختلف سرعتوں کے ساتھ حرکت  
 کرنے لگیں گے۔

(۱۴۴) واضح ہو کہ جب تک دو اجسام ایک دوسرے سے مل کر رہتے  
 ہیں تب تک ہر نقطہ میں ان کے عمل باہمی مقدار میں برابر اور سخت میں مخالف ہوتے  
 ہیں (موجب قانون سوم حرکت)۔ لیکن صاحب نے بہت تجربہ کئے بعد دریافت کیا  
 ہے کہ مضاربہ کے پیشتر اول جسم کی سرعت منتقب جس کے ساتھ وہ دوسرے جسم کے  
 قریب ہوتا جائے اس سرعت متساوی سے جس کے ساتھ وہی جسم مضاربہ کی بعد  
 جسم سے بعید ہوتا جاتا ہے ہمیشہ ایک نسبت مستقل رکھتی ہے۔

مثلاً اگر مضاربہ کو پیشتر اول جسم کی سرعت منتقب بلحاظ دوسرے جسم کے م ہو تو گویا  
 اس سرعت کے ساتھ یہ جسم دوسرے کے قریب آ رہا ہے اور اگر مضاربہ کو بعد  
 جسم کی سرعت منتقب بلحاظ اول جسم کے م ہو تو گویا اس سرعت کے ساتھ اول  
 جسم دوسرے سے بعید ہوتا جاتا ہے کیونکہ اس حالت میں اول جسم کی سرعت منتقب  
 بلحاظ دوسرے جسم کے - م ہوگی (دیکھو حد ۶۶) اور یہ کہنا کہ ایک شے سرعت  
 (م) کے ساتھ دوسرے کے قریب آ رہی ہے یا پہلے کہنا کہ وہی شے سرعت  
 (-م) کے ساتھ دوسرے سے بعید ہوتی جاتی ہے ایک ہی بات ہے میں نہیں  
 صاحب کے تجربہ سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ م، -م، یا م = م جہاں کہ ایک مقدار  
 مستقل ہے جس کی قیمت اجسام مضاربہ لاطیفی پر منحصر ہے۔ مقدار کو ہم علامت  
 کہیں گے۔ تجربہ کثیر سے معلوم ہوا ہے کہ اس علامت کی قیمت عام اشیاء کے لئے

مصر سے زیادہ اور عدد آگے کم ہوتی ہے۔ مگر فرض تحقیق حتماً پوری لاطیق  
اجسام کے لئے اہم مقدار کی قیمت کو عدد اول بالکل غیر لاطیق اجسام کے لئے قیمت مصر  
فرض کر لیتے ہیں \*

مگر یہ صرف قیاسی ہے کیونکہ دنیا میں کوئی جسم ایسا نہیں پایا جاتا جس میں لاطیفی پوری  
پوری موجود ہو یا بالکل نہ موجود ہو \*

(۱۴۲) یہ بات قابلِ یاد رکھنے ہے کہ علامت لاطیقی کوئی بالکل مستقل مقدار نہیں ہے  
بلکہ تجربہ سے معلوم ہوا ہے کہ جب اجسام کی سرعت بوقت مضاربہ بہت زیادہ  
ہوتی ہے تو اس علامت کی قیمت کچھ گھٹتی جاتی ہے۔ مگر جب سرعت مضاربہ  
بہت ہی بڑی نہ ہو تو اس علامت کو مقدار مستقل فرض کرنے سے کوئی غلطی واقع  
نہوگی \*

گیند دن کا مضاربہ دو قسم کا ہوتا ہے۔ اگر بوقت مضاربہ دو نو گیند دن کے مرکز  
ایک ہی خط میں حرکت کرتے ہوں تو اس مضاربہ کو مضاربہ مستقیم کہتے ہیں۔ اور جب  
دو ایک ہی خط میں حرکت کریں تو اس کو مضاربہ غیر مستقیم کہتے ہیں \*

(۱۴۶) دو گیند بچے اجسام ج و ج میں اور ایک ہی خط میں متحرک ہے ایک دوسرے  
سے ٹکرائے ہیں تو بعد از مضاربہ انکی حرکت دریافت کرو \*

فرض کرو کہ گیند ایک ہی سمت میں چل رہے ہیں اور بوقت مضاربہ انکی سرعت  
میں سے ایک گانگ و گ بھی جہان گھر گ بڑا ہے \*

جو گھر اجسام بوقت مضاربہ ایک ہی خط مستقیم میں حرکت کر رہے تھے تو بعد از  
مضاربہ میں دسے اسی خط میں حرکت کرتے گئے کیونکہ کوئی دلیل نہیں ہے

کہ اس خط کے باہر چلے جائیں۔ فرض کرو کہ بعد از مضاربہ انکی سرعت جدا گانہ گد  
گدین +

ظاہر ہو گا کہ اول جسم کی قوت حرکت باعث مضاربہ بقدر (گ۔ گ) ج کے کم  
ہو جائیگی اور دوسرے جسم کی قوت حرکت اسی سبب بقدر (گ۔ گ) ج  
کوڑہ جائیگی۔ (اسلئے بموجب حد ۱۴۱)

$$(گ۔ گ) ج = (گ۔ گ) ج ..... (۱)$$

اور نیز بیشتر از مضاربہ اول جسم کی سرعت منتسب لمجاظ دوسرے جسم برابر تھی  
(گ۔ گ) کے اور بعد از مضاربہ دوسرے جسم کی سرعت منتسب لمجاظ اول  
جسم کے برابر ہے (گ۔ گ) اسلئے اگر علامت لاطیفی کو تعبیر کرے  
تو بموجب تجربہ نیوٹن صاحب کے  $(گ۔ گ) = (گ۔ گ) ..... (۲)$   
مساوات نمبر (۱) و (۲) سے گ۔ گ کی قیمتین دریافت ہو سکتی ہیں یعنی  
گ۔ گ = گ۔ گ + گ۔ گ - گ۔ گ

ج + ج

$$\text{اور گ۔ گ} = \text{گ۔ گ + گ۔ گ - گ۔ گ}$$

کو مثبت

ج + ج

ہم نے اوپر فرض کیا ہے کہ سرعت گ۔ گ ایک ہی سمت میں اور نیز سمت  
فرض کیا ہے۔ پس اگر مساوات مذکورہ بالا سے گ۔ گ کی قیمت مقدار  
مثبت نکلے تو اس سے بہرہ سمجھ لینا چاہیے کہ اسکی سمت سمت مذکورہ کے

(۱۴۷) مساواتوں مذکورہ بالا سے کئی خاص خاص نیچے نکل سکتے ہیں +

(۱) فرض کرو کہ دو نو گیند پورے پورے لاسطیق ہیں۔ تو گویا  $d = 1$

$$\text{یگ} = \frac{\text{گ} (\text{ج} - \text{ج}') + \text{گ}' \text{ج}}{\text{ج} + \text{ج}'}$$

$$\text{اور گ} = \frac{\text{گ} \text{ج} - \text{گ}' (\text{ج} - \text{ج}')}{\text{ج} + \text{ج}'}$$

(ب) فرض کرو کہ دو نو گیند بالکل غیر لاسطیق ہیں تو گویا  $d = 0$

$$\text{یگ} = \frac{\text{گ} \text{ج} + \text{گ}' \text{ج}}{\text{ج} + \text{ج}'} = \text{گ}$$

یعنی اس حالت میں دو نو گیند بعد از مضاربہ متحد ہو کر حرکت کریں گے  
(ج) اگر  $\text{گ} = 0$  یعنی اگر ایک متحرک گیند دوسرے ساکن گیند سے  
مضاربہ کرے تو

$$\text{گ} = \frac{\text{گ} (\text{ج} - \text{ج}')}{\text{ج} + \text{ج}'}$$

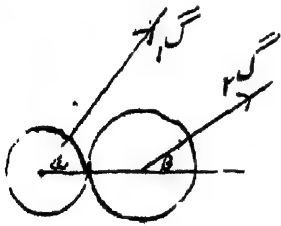
$$\text{وگ} = \frac{\text{گ} \text{ج} (1 + d)}{\text{ج} + \text{ج}'}$$

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ ساکن گیند بیاعث مضاربہ کے حرکت میں آویں گی  
اور اول جسم بعد از مضاربہ اسے سمت سابقہ میں یا سمت مخالف میں حرکت  
کریگا بشرطیکہ  $\text{ج} > \text{ج}'$  یا  $\text{ج} < \text{ج}'$  ہو۔ اگر  $\text{ج} = \text{ج}'$  ہو تو بعد از

مضاربہ اول گیند ساکن ہو جائیگا اور چونکہ اس حالت میں گ = گ لہذا دوسرا  
گیند اول گیند کی سرعت کے ساتھ حرکت کرے لگے گا +  
(د) حالت بائیں گونچ بہت کم ہوئے اگر ج کی قیمت بہت بڑھ جائے تو

$$گ = \frac{گ (ج - ج)}{ج + ج} = \frac{گ (ج - ج)}{ج + ج}$$

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ بعد از مضاربہ اول گیند اپنے سمت سابقہ کے مخالف  
لوٹ آوے گا۔ اور اس کے لوٹنے کی سرعت اس کی سابق سرعت کی نسبت گھٹا ہو جائے گی  
اگر کوئی گیند کسی دیوار سے یا زمین پر آکر لگے تو اس قسم کی حرکت دفع میں  
آتی ہے +



(۱۴۸) دو گیند مضاربہ غیر مستقیم میں  
آئے۔ مضاربہ کے بعد ان کی حرکت دریافت  
کر دو +

فرض کرو کہ عین قبل از مضاربہ گیند مذکورہ جدا گانہ  
سرعت ہائے گ اور گ سے متحرک ہیں جنکی سمتیں گیند ون کے مرکز ون کے  
وصل کنندہ خط سے جدا گانہ اور قدامتاً وینا تے ہیں اور مضاربہ کے بعد انکی  
سرعت ہائے گ اور گ میں بھی سمتیں خط مذکورہ سے زوایا ۵ اور ۶ بنائی ہیں  
ظاہر ہے کہ مضاربہ کا عمل مرکز ون کے وصل کنندہ خط میں ہی ہوگا کیونکہ گیند

یا کھل گول اور ہوا پر مین اسلئے اگر ہم انکی سرعتوں کو اس خط میں اور اس خط کے  
عمود پر منسلک کر تو یہ خط عمود میں اجزا و مفصلہ میں مضاربہ کا کچھ اثر نہیں ہوگا یعنی مضاربہ  
کے بعد یہی اجزا اسے کی قیمت وہی رہیگی جو قبل از مضاربہ تھی مگر مرکزی خط  
میں سرعہ ہاے کے اجزا و مین مضاربہ سے ویسا ہی تغیر واقع ہوگا جیسا کہ  
مضاربہ مستقیم کے باب میں پیشتر بیان ہو چکا ہے پس مضاربہ کے بعد گیندوں  
کی حرکت دریافت کرنے سے ہمیں مساوات ہاے ذیل حاصل ہونگی

$$(۱) \dots\dots\dots \text{گ جب } a = \text{گ جب } \theta$$

$$(۲) \dots\dots\dots \text{گ جب } \beta = \text{گ جب } \theta$$

اور بموجب قواعد مضاربہ مستقیم کے

$$(۳) \dots\dots\dots \text{ج (گ جب } a - \text{گ جب } \theta) = \text{ج (گ جب } \phi - \text{گ جب } \beta)$$

$$(۴) \dots\dots\dots \text{اور گ جب } \phi - \text{گ جب } \theta = \text{ج (گ جب } \theta - \text{گ جب } \beta)$$

ان مساوات سے گ اور گ کی قیمت اور  $\theta$  اور  $\phi$  کی قیمت بھی دریافت ہو جائے گی  
اس شکل کی کوئی خاص حالتیں بیان کر کے یہ باب تمام کیا جائیگا \*

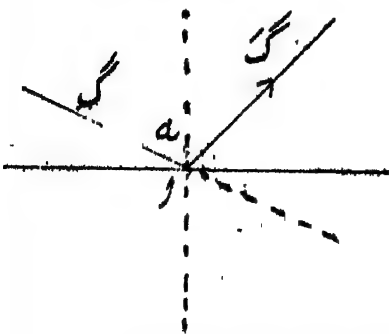
(۴) اگر کوئی گیند سرعت گ

سے چل کر کسی ہوا پر سطح قائم

سے مضاربہ بغیر مستقیم میں

آئیے تو مضاربہ کے بعد اسکی

حرکت دریافت کر دے \*



فرض کر دے کہ عین قبل از مضاربہ سرعت گ کی سمت اس سطح پر عمود سے زاویہ  $\alpha$  بناتی ہے اور مضاربہ کے بعد گیند کی سرعت گ ہے جسکی سمت اس عمود کے ساتھ زاویہ  $\theta$  بناتی ہے چونکہ مضاربہ کا عمل صرف اس خط عمود کی سمت میں ہوگا اس لئے سطح کے متوازی گیند کے جز و منفصلہ گ جب  $\alpha$  میں مضاربہ سے کچھ تغیر واقع نہ ہوگا مگر عمود کی سمت میں جز و منفصلہ گ جم  $\alpha$  پر مضاربہ کا اثر ویسا ہی ہوگا جیسا کہ مضاربہ مستقیم کے قاعدے میں بیان ہوا \*

$$\therefore \text{گ. جب } \theta = \text{گ. جب } \alpha$$

$$\text{اور گ. جم } \theta = \text{گ. جم } \alpha$$

$$\therefore \text{گ}^2 = \text{گ}^2 (\text{جیا } \alpha + \text{جم } \alpha) \dots \dots \dots (۱)$$

$$\text{اور مس } \theta = \text{مس } \alpha \dots \dots \dots (۲)$$

ان مساوات سے گیند کی حرکت مضاربہ کے بعد معلوم ہو سکتی ہے۔ چونکہ یہاں مس  $\theta$  منفی ہے اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ زاویہ  $\theta$  کی قیمت  $90^\circ$  سے زیادہ ہوگے جیسا کہ شکل مندرجہ میں دکھلایا گیا ہے \*

تعریف۔ زاویہ گ  $\alpha$  اور گ  $\theta$  اب ان ہر دو روایا کو زاویہ حدودی اور زاویہ ٹوکناسی کہتے ہیں \*

$$\text{اگر } \alpha = 90^\circ \text{ تو مساوات (۲) سے مس } \theta = \text{مس } \alpha$$

$$\therefore \theta = 90^\circ - \alpha \quad \therefore \text{زاویہ گ } \alpha \text{ اب } = \text{زاویہ گ } \theta$$

گویا اس حالت میں زاویہ حدودی و زاویہ ٹوکناسی باہم مساوی ہیں

## مشالات باب پانزدہم

(۱) اگر مساوی جسم کے دو غیر لاطیقی گیندوں میں مضاربہ واقع ہو تو ثابت کرو کہ وہ اپنی سرعتوں کو آپس میں تبادلہ کر لینگے

(۲) کوئی  $\frac{1}{2}$  پونڈ گیند فی سکند  $12$  فٹ کی سرعت سے چلتے ہوئے کسی دوسرے  $\frac{1}{2}$  پونڈ گیند سے جو  $1$  فٹ فی سکند چلتا ہے مضاربہ میں آیا۔ علامت لاطیقی گیند کے  $\frac{1}{2}$  ہے تو مضاربہ کے بعد گیندوں کی سرعتوں کو معلوم کرو۔

جواب ۱۱ اور ۱۳

(۳) کوئی متحرک جسم ج کسی ساکن جسم ج کے ساتھ مضاربہ میں آیا۔ تو علامت لاطیقی کی قیمت کیا ہونی چاہئے تاکہ مضاربہ کے بعد جسم ج ساکن ہو جاوے

جواب ج

(۴) کوئی تین پونڈ گیند جو سرعت  $12$  سے متحرک تھا ایک  $\frac{1}{2}$  پونڈ گیند کے ساتھ جو اس کے سمت مخالف میں سرعت  $8$  سے متحرک تھا مضاربہ میں آیا۔ علامت لاطیقی  $1$  ہے تو بعد مضاربہ اس کی سرعتوں کو دریافت کرو۔

جواب  $6$  اور  $14$

(۵) کوئی گیند کسی سطح پر جدوئی کی ساہیہ گرا اور زاویہ انعکاسی کے ساتھ لوٹ گیا تو گیند کی علامت لاطیقی دریافت کرو۔ جواب  $\frac{1}{2}$

(۶) پورے لاطیق گیند جبکہ اجسام کی نسبت  $\frac{1}{2}$  ہے اور جو مساوی مقوی کے ساتھ مخالف سمتوں میں متحرک ہیں مضاربہ میں آئے تو ثابت کرو کہ مضاربہ



کے بعد بڑے جسم والا گیند ساکن ہو جائیگا +

(۷) کوئی گیند سا ارتفاع سے کسی ہوا رافٹی پر گرا اور بار بار اوپر اچھلنے کے بعد حالت سکون میں آگیا اگر گیند کی علامت لاسیطقی عہد ہو تو اسے سکلر فاصلوں طے شدہ کا مجموعہ دریافت کرو +

$$\text{جواب } \frac{26+1}{26-1} \times ۲۶$$

(۸) کوئی گیند میدان کی سطح مائل کے سا ارتفاع سے پہنچو پہنچا سکے گا ہر سطح افقی کے ساتھ مضاربہ میں آیا تو اس سطح رافٹی گیند کی وسعت دریافت

کرو + جواب ۲، سا جب ۵

(۹) ایک غیر لاسیطقی جسم متحرک ہو کر ایک دوسرے ساکن جسم سے جو اسکا دو چند ہے مضاربہ میں آیا تو ثابت کرو کہ مضاربہ کے بعد اول جسم سرعت یکساں تہائی گہٹ جائے گی +

(۱۰) ۲ جسم جو ایک ہی سمت میں جدا گانہ سرعت ہائے ۲ اور ۴ سے متحرک تھے مضاربہ میں آئے بعد از مضاربہ انکی سرعت میں جدا گانہ ۴ اور ۶ میں تو علامت لاسیطقی کی قیمت دریافت کرو + جواب ۱/۲

(۱۱) دو جسم مخالف سمتوں میں متحرک ہو کر مضاربہ میں آئے ثابت کرو کہ اگر عین قبل از مضاربہ انکے قواسے حرکت مساوی ہوں تو مضاربہ کے بعد بھی قواسے حرکت مساوی رہیں گے +

(۱۲) دو جسم مساوی سرعتوں سے مخالف سمتوں میں حرکت کرتے ہوئے مضاربہ میں آئے۔ بعد مضاربہ کے ایک جسم اپنی سرعت سابق سے لوٹ گیا اور دوسرا اپنی نصف سرعت سے اسی سمت میں چلا اور ثابت کرو کہ ان اجسام میں سے

ایک دوسرے کا جو گنا ہی اور انکی علامت لاسطیقی  $\frac{1}{2}$  ہے +  
 (۱۳) ایک متحرک جسم ج ایک ساکن جسم ج کے ساتھ مضاربہ میں آیا یا مضاربہ  
 کے بعد ان دونوں کی سرعتیں مساوی ہو گئیں تو علامت لاسطیقی دریافت کرے

$$\frac{\text{ج}}{\text{ج} - \text{ج}}$$

(۱۴) ج اور ج و ج تین اجسام میں ان میں سے اول اور سیوم ایک ہی  
 مادہ کا بنا ہوا ہے۔ ابتدا میں یہ تینوں جسم ساکن تھے بعد ازاں جسم ج  
 متحرک ہو کر ج سے مضاربہ میں آیا اور ج اس مضاربہ سے متحرک ہو کر  
 ج سے مضاربہ میں آیا تو علامت لاسطیقی کیا ہونی چاہیئے تاکہ جسم ج کی  
 سرعت بعد از مضاربہ ویسی ہی ہو جیسی کہ اس حالت میں ہوئی جبکہ ج موجود ہوتا اور ج  
 ہی ج کے ساتھ مضاربہ میں آتا۔

$$\frac{\text{ج} + \text{ج}}{\text{ج}}$$

$$\frac{\text{ج} + \text{ج}}{\text{ج}}$$

(۱۵) کئی اجسام سلسلہ ہندسیہ میں ہیں جسکی نسبت مشترکہ سہ ہے ایک ہی خط مستقیم  
 میں رہتے ہوئے ہیں۔ جسم اول کسی سرعت کے ساتھ متحرک ہو کر دوسرے  
 جسم سے مضاربہ میں آیا اور دوسرا اس مضاربہ سے متحرک ہو کر تیسرے سے  
 اور تیسرا چوتھے سے مضاربہ میں آیا علیٰ ہذا القیاس ثابت کر کے بعد از مضاربہ  
 ان اجسام کی سرعتیں ایک سلسلہ ہندسیہ میں ہونگی جسکی نسبت مشترکہ

$$\frac{1}{1+2}$$

(۱۶) مثال الامین اجسام کو بیان کیا نسبت ہونی چاہئے تاکہ مضاربہ کے بعد ہر ایک جسم کی سرعت زائل ہو جائے +

$$\text{جواب ج} = \frac{\text{ج}}{۶} = \frac{\text{ج}}{۲} = \frac{\text{ج}}{۶} \text{ وغیرہ}$$

(۱۷) ایک متحرک جسم ج ایک ساکن جسم ج کے ساتھ مذاویہ رہے تاکہ مضاربہ میں آیا تو قبل از مضاربہ اور بعد از مضاربہ کو متحرک کر کے لیا گا مذاویہ معلوم کرو +

$$\text{جواب } \frac{۱+۶}{۲} \times \frac{\text{ج} \text{ جبکہ}}{\text{ج} + ۶ \text{ ج} \text{ جسم } ۲}$$

(۱۸) کوئی جسم کسی دوسرے مساوی جسم ساکن کے ساتھ غیر متقیم مضاربہ میں آیا اور دونو اجسام پوری لاسطیق میں اور قبل از مضاربہ اور بعد از مضاربہ اصل جسم کی خطوط حرکت کا درمیانی تھاویہ ۹۰ کا ہے تو مضاربہ کے بعد اسکی سرعت کیا ہوگی - جواب سرعت سابق کا نصف

(۱۹) کوئی جسم سطح افقی کے کسی نقطہ سے میدان ۹۰ کے ساتھ سرعت گ سے مخدوف ہوا اور سطح افقی پر گر بار بار اچھلتا ہوا چلا گیا جسم کی علامت لاسطیق ہے تو سطح افقی میں اسکی کل وسعت اور کل وسعت کا وقت تاخت اور تہ وین دفعہ اچھلنے میں اسکا میلان دریافت کرو -

$$\text{جواب } \frac{\text{گ} \text{ جبکہ}}{\text{ق} (۱-۶)} \text{ اور } \frac{\text{گ} \text{ جبکہ}}{\text{ق} (۱-۶)}$$

(۲۰) کوئی جسم ۹۰ میلان کے ساتھ کسی نقطہ معین سے ایک دیوار کی طرف چو کہ

اس نقطہ سے ق فاصلہ پر واقع ہو گا۔ د و د اور اس دیوار سے لگا کر کہا کہ میرا نقطہ  
قذف پر لوٹ آیا تو جسم کی سرعت ق فاصلہ پر کیا تھی ؟

جواب ما ق فاصلہ (۱۳۱)  
جواب

(۲۱) کوئی پورا لاسطیق گیند کسی د و دیوار و ن کے مابین کسی نقطہ معین سے اور  
سرعت معین کے ساتھ قذف ہوا اور ہر د و دیوار و ن کے ساتھ ایک  
ایک ایک دفعہ لگا کر کہا کہ نقطہ قذف پر لوٹ آیا تو اس کی سرعت قذف کیا تھی ؟  
(۲۲) کسی اٹا کھیلنے کی میز پر جو کہ عین سطح افقی پر رکھے ہوئے ہے ایک  
بالکل لاسطیق گیند کسی نقطہ معین سے سرعت معین کے ساتھ متحرک کیا گیا  
اور چاروں کناروں سے ایک ایک دفعہ لگا کر کہا کہ نقطہ قذف پر لوٹ آیا تو تاس  
کرہ کو گیند کی حرکت ایک ایسی متوازی الاضلاع شکل بنا دی گی کہ جس کے اضلاع  
میز کے وترون کے متوازی ہوں گے ؟



Secant of an angle	...	...	زاویه کا متقاطع ( قع )
Space	...	...	فاصلہ
Terms of a series	...	...	ارام سلسلہ
Time of flight of a projectile	...	...	وقت تاخات
Unit	...	...	اکائی
Uniform	...	...	یکسان-مستوی
Uniform force	...	...	طاقت مسلسل
Variable	...	...	غیر یکسان-متبدل
Velocity	...	...	سرعت
„ resultant or actual	...	...	وائعی یا حاصل سرعت
„ acquired or generated	...	...	سرعت محصلہ
Velocity, resolved part of	...	...	جزر منفصلہ
„ angular	...	...	سرعت الزاویہ
„ initial	...	...	سرعت ابتدائی
„ relative	...	...	سرعت متناسب
Vertical line	...	...	خط سمت الراس یا خط راس
„ plane	...	...	سطح راس
Vertex	...	...	راس چوتھی
Volume	...	...	حجم
Weight	...	...	وزن
„ real	...	...	وزن حقیقی یا اصلی
„ apparent	...	...	وزن ظاہری

Motion sliding	...	...	دېرسلنا
Negative	...	...	منفي
Number	...	...	مقدار-عدد
Nth. unit	...	...	ن دين اکائي
Oscillation	...	...	جذبش
Ordinate of a point	...	...	نقطه کا معين
Parabola	...	...	پارا بولا-قريب البصري
Pendulum	...	...	شاقول
Pole of the earth	...	...	قطب زمين
Positive	...	...	مسيبت
Pressure	...	...	دباؤ
Principal axis of a curve	...	...	محور عظيم
Proportional	...	...	متناسب
„ inversely	...	...	متناسب علي العكس
Projection	...	...	قذف-خذف
Projectile	...	...	مقذوف-مخذف
Progression	...	...	سلسله
Pully	...	...	پهرکي-چرکهي-گهرنی
Rate	...	...	حساب
Ratio	...	...	نسبت
Range of a projectile	...	...	وسعت مقذوف
Resistance	...	...	مزعمت استقامت
Secant or chord	...	...	وتر

Equator	...	...	خط استوا
Equilibrium	...	...	حالت سکون - اعتدال
Focus	...	...	نقطہ ماسکہ
Force	...	...	طاقت
Friction	...	...	تحرک
Graduated	...	...	درجہ لکھا ہوا
Gravitation	...	...	کشش ثقل
Height of a point or plane	...	...	ارتفاع
Horizontal line	...	...	خط افقی
Horizontal plane	...	...	سطح افقی
Inclined plane	...	...	سطح مائل
Inclination of a plane	...	...	مالان
Latitude of a place	...	...	مقام کا عرض
Laws of motion	...	...	حرکت کے قوانین
Line of quickest descent	...	...	خط سربم النزول
Line of slowest descent	...	...	خط بطی النزول
Locus of a point	...	...	مقام النقاط
Mass	...	...	جسم
Matter	...	...	مادہ
Maximum	...	...	عظیم اطول
Momentum	...	...	قوت حرکت
Motion	...	...	حرکت
„ rotatory	...	...	حرکت مدوری

## GLOSSARY OF TECHNICAL TERMS.

لغت الفاظ \*

Acceleration	...	...	اسراع
Action and reaction	...	...	فعل افعالي و فعل انفعالي
Abscissa of a point	...	...	نقطه کا محدہ
Angle of Incidence	...	...	زاویہ حدوثی
Angle of Reflexion	...	...	زاویہ انعکاسی
Average or mean	...	...	اوسط
Axis	...	...	محور
Body	...	...	شئی
Body acted on by force	...	...	شئی معمولہ
Central or centripetal force	...	...	طاقت مرکزی
Centrifugal force	...	...	قوت ہاربه
Circular measure	...	...	گول ناپ
Co-efficient of elasticity	...	...	علامت لاسطقتی
Co-efficient of friction	...	...	علامت تحکیک
Collision or Impact	...	...	مضاربہ
Collision direct	...	...	مضاربہ مستقیمہ
Collision oblique	...	...	مضاربہ غیر مستقیم
Constant in magnitude	...	...	مستقل
Compound motion	...	...	حرکت مرکب
Elasticity	...	...	لاسطقتی



whole the of subject-matter, properly belonging to it. Co-  
examples given at the end of chapters will furnish abundant  
exercise to the students. Everywhere, prominence has been  
to the co-ordinate method of treatment, with a view to im-  
the student, at this early stage of his study, with the great im-  
tance of that method as a means of mathematical analysis.  
author's experience as a mathematical teacher for many years  
justifies his expectation that this arrangement will be found  
convenient and useful.

The author has to record his thanks to his friends  
pupils—Lala Aya Ram, B. A., Muhammad Husain, and Dil  
Ali Shah, for the valuable assistance they have given him  
compiling the present work. Nor can he omit to acknowledge  
great obligation he is under to Maulvi Ghulam Mustafa, of  
Oriental College, Lahore, for the ready advice and help which  
rendered whilst the work was passing through the press.

LAHORE GOVT. COLLEGE, }  
1st November 1879. }

## PREFACE.

---

THE aim of the author in compiling the present work is to co-operate with the Panjab University College in their laudable attempt to impart Western knowledge through the medium of the Vernacular. While recognizing from the beginning the necessity of publishing works in the Vernacular, that learned body has lately directed its attention more particularly to the translation and adaptation of Mathematical works, the want of which has hitherto been very seriously felt by the higher students on the Vernacular side, who have had no means to compete on equal terms with their English-knowing comrades in the field of Mathematics. The author had, with concern, watched this anomalous state of things during the five years of his stay in Lahore, and it is only when his expectation of seeing the work undertaken by abler hands proved as distant as ever, that he has ventured to supply the want in the form now before the public.

The author is aware that there are many inaccuracies, if not positive mistakes, both in the substance as well as in the arrangement of the present work. He can only adduce in excuse that he had no beaten track to follow. The greatest difficulty, for instance, was encountered in rendering exact the technical terms in Urdu. As very little help could be obtained under this head from former authors, either in Arabic or Urdu, the author was obliged in many places to adopt or coin words of his own; and although such adoption was made by the advice and approval of some of the most learned maulvis to whom the author had access, still he is himself not satisfied with many terms, and can only regard them as tentative and liable to be replaced by more suitable ones as time and experience suggest. The author claims the indulgence of the public to such mistakes on the plea that it is always easier to improve a subject than to start it, and he will thankfully receive any suggestions for improvement and try to correct himself in a future edition of the work, if called for.

A glossary of technical terms, with their English equivalents, is appended at the end for easy reference.

The author claims no originality in the preparation of the present work. He has freely availed himself of almost all the available sources of information on the subject, particularly the works of Todhunter, Goodwin, Wilson, Parkinson, Walton and others. Only those portions of the subject have been dealt with as have particular reference to the High Proficiency Examination of the Panjab University College. The arrangement of the chapters has been carefully made and each has been made to include the